SERIE N°4-1 : Primitive et Calcul Integrale

EXERCICE 1 :

Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble des primitives F de f dans un intervalle I inclus dans Df.

1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; 2) f(x)=$\frac{1}{2-x}$; 3) $f(x) = \frac{-2}{3x-1}$; 4) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$; 5) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+5}$;

6) $f(x) = \frac{cosx}{sinx}$; 7) $f(x) = \tan x$; 8) $f(x) = \frac{lnx}{x}$; 9) $f(x) = \frac{1}{xlnx}$; 10) $f(x) = \frac{12}{(x+1)ln^3(x+1)}$

EXERCICE 2 :

On considère la fonction définie sur R - $\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^2}$

Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que pour tout x élément de $\mathbb{R} - \{-1\}$ on ait :

$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ .En deduire une primitive de la fonction f sur $]-1\,;\,+\infty[$

EXERCICE 3 :

Soit la fonction définie sur R - $\left\{-1, \frac{-1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{2x^2+3x+1}$

Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout x élément de R - $\left\{-1, \frac{-1}{2}\right\}$ on ait :

$f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$

En déduire la primitive de la fonction f sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, qui s'annule en $x = 1$.

EXERCICE 4 :

Soit la f fonctions définie par :

$$f(x) = \frac{sinx}{sinx+cosx}$$

1) Déterminer le domaine de définition Df de f.

2) Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = a + b\left(\frac{-sinx+cosx}{sinx+cosx}\right)$$

3) Donner une primitive de f sur Df.

EXERCICE 5 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 (-2x^2 + 5x + 3)dx$; 2) $I = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)dx$; 3) $I = \int_1^2 \frac{4x^3-3x^2+1}{x^2} dx$;

4) $I = \int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4}\, dx$; 5) $I = \int_1^2 \frac{3x+6}{x^2+4x+3}\, dx$; 6) $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx$;

7) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin3x + cos2x\,)dx$; 8) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x.sin^2x.dx$; 9) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cos^2x}\, dx$;

10) $I = \int_0^{\pi} (2sin2x - cosx\,)dx$.

EXERCICE 6 :

1) Démontrer que quel que soit x réel $sin^2x - sin^4x = \frac{1-cos4x}{8}$

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin^2x - sin^4x\,)dx$.

EXERCICE 7 :

On donne $f(x) = \sin x . \sin 2x . \sin 3x$

a) Lineariser $f(x)$.

b) Calculre l'integrale $J = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{f(x)\ dx}$

EXERCICE 8 :

On pose c et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin^2x\, dx$

1) Calculer $I + J$.

2) Calculer $I - J$ (On utilise la méthode d'integration par parties)

3) En déduire I et J.

EXERCICE 9 :

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} cos^2x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} sin^2x\, dx$.

1) Calculer $I + J$.

2) Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x}(cos2x\ +\ sin2x\,)$

a) Calculer $'(x)$.

b) En déduire $I - J$.

c) Calculer I et J.

EXERCICE 10 :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2x.cos^2xdx$

1) Calculer $I - J$ et $I + J + K$.

2) Exprimer cos4x en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire $I + J - 3K$ puis , J et K .

EXERCICE 11 :

1) On considère les intégrales : $A = \int_{-\pi}^{\pi} cos2x.cos4xdx$ et $B = \int_{-\pi}^{\pi} sin2x.sin4xdx$.

1) Calculer $+B$, $A - B$ puis deduire A et B.

2) On considère maintenant : $C = \int_{-\pi}^{\pi} cospx.cosqxdx$ et $D = \int_{-\pi}^{\pi} sinpx.sinqxdx$ ou p et q sont des entiers naturels non nuls .Calculer C et D.

EXERCICE 12 :

1)a) Montrer que $sin^4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x$

b) Calculer $f(t) = \int_0^t (4sin^4x - \frac{3}{2})dx$

c) Résoudre dans R* l'équation $f(t) = 0$.

2) Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^4x.cos^2x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2x.cos^4x\,dx$

a) Calculer $I + J$ et $I - J$.

b) En déduire I et J.

EXERCICE 13 :

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$

1) Déterminer la domaine de définition Df de f.

2) Déterminer les nombres réels a et b tels que ∀ x ∈ Df : $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$

3) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_2^3 f(x)dx$.

EXERCICE 14 :

Soit F la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par : $F(x) = x\sqrt{1-x}$

1)a) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty, 1]$ et étudier la dérivabilité de F en 1

b) Calculer $F(x)$ pour tout x de $]-\infty, 1]$

2) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $]-\infty, 1]$: par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

a) Exprimer $h(x)$ en fonction de $F'(x)$ et de $g(x)$

b) En déduire une primitive H de h sur $]-\infty, 1]$

c) Déterminer la primitive H_0 de h s'annulant en $x = -3$.