DEVOIR N°2-2 DU 1er SEMESTRE :
DUREE : 4H

Exercice 1 :

On considère dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$(E): (1+iz)^n = (1-iz)^n$ où $n \in IN$ et $n \geq 2$

1) a) Montrer que pour toute solution z de l'équation (E) on a : $|1+iz| = |1-iz|$

b) En déduire que si z est une solution de (E), z est un réel

2) On rappelle que pour tout réel z, il existe un unique réel θ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que z = $\tan\theta$.

Exprimer le complexe $\frac{1+iz}{1-iz}$ en fonction de $e^{i\theta}$

3) a) Montrer que z est solution de (E) si et seulement si θ est solution de $(E'): e^{i2n\theta} = 1$

b) On suppose désormais $n = 6$

- Résoudre l'équation (E') (On représentera les images M_k des solutions ω_k de (E'))
- En déduire les solutions de l'équation (E)

4) On se propose maintenant de déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que $Z = \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^2$ soit imaginaire pur

a) Montrer que Z est imaginaire pur si et seulement si : $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$

b) En déduire l'ensemble (Γ).Construire (Γ) dans le plan complexe muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

1) Etude d'une fonction auxiliaire

On considère d'abord la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

a) Montrer que si $0 < x \leq 1$, *on a* $g(x) > 1$

b) Calculer g(1) et g(2)

c) Montrer qu'il existe un réel strictement positif et un seul α tel que $g(\alpha) = 0$

d) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2) Etude de la fonction f

a) Exprimer la fonction dérivée f' *de* f à l'aide de g.

b) Etudier les variations de f.

c) α étant le réel introduit dans 1) c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

d) Calculer les $\lim_{x \to 0} f(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

e) Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe représentative de C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unités 2cm abscisse et 5cm ordonnée)

On fera figurer la tangente T au point d'abscisse 1.

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que si 0<x<1, alors $\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{2}{(-x)}\ln(-x+1)-\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$

   En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$. La fonction f est –elle dérivable au point $x_0=0$?
3) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Que peut on en déduire?

   c) Etudier les variations de f.

   d) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

   e) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

   a) Montrer que g admet une application réciproque définie sur IR.

   b) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(0)$ et tracer $C_{g^{-1}}$