SCIENCE EN HERBE — MATHS TERMINALE S2 & S4 & S5

DEVOIR N°1-1 : LIMITES, CONTINUITE ET DERIVATION
DUREE : 2H30mn

Exercice : 8 points

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x-1$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x}{16x^2+3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^5+(1-x)^3}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x-1$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$

Problème : 12 points

Soit la fonction numérique h : $IR \to IR$ telle que : $\begin{cases} h(x) = -x+2-\dfrac{2x}{x^2+1} & si \quad x \le 1 \\ h(x) = x-1-3\sqrt{x^2-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$

A) 1) Justifier que D_h =IR.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 1.
3) Déterminer les limites de h aux bornes de D_h.
4) a) Montrer que la courbe C_h admet une asymptote (D_1) d'équation : $y=-x+2$ en $-\infty$ à préciser.
b) Etudier le comportement de C_h en $+\infty$.
c) Préciser la position de C_h par rapport aux asymptotes.
5) a) Calculer $h'(x)$ dans les intervalles où h est dérivable.
b) Etablir le tableau de variation de h.
c) Tracer C_h et les asymptotes dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit g la restriction de h à l'intervalle $]-\infty,1]$
1) Montrer que g est bijective de $]-\infty,1]$ sur un intervalle J à déterminer.
2) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α.
Montrer que $\dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{3}{4}$.
3) a) Etudier la dérivabilité de g^{-1}.
b) Calculer $(g^{-1})'(2)$.
c) Construire $(C_{g^{-1}})$.