Durée : 06 heures
Séries: Toutes

SESSION 2009

CLASSES DE TERMINALE

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME-I (05 points)

On donne dans l'espace trois droites (D), (D'), (D″) concourantes en O et non coplanaires.
Sur chacune d'entre elles, on prend trois points deux à deux distincts, A_i, B_i, C_i avec $i \in \{1, 2, 3\}$ et
$A_i \in (D)$; $B_i \in (D')$; $C_i \in (D'')$.

On suppose que : $\dfrac{2}{\overline{OA_2}} = \dfrac{1}{\overline{OA_1}} + \dfrac{1}{\overline{OA_3}}$ et les relations analogues sur les droites (D') et (D″).

1) Trouver tous les plans $(A_i\, B_j\, C_k)$ tels que $i + j + k = 6$ avec i, j et k éléments de $\{1, 2, 3\}$. **(01pt)**

2) En munissant l'espace d'un repère convenablement choisi, déterminer les équations cartésiennes de chacun des plans trouvés au 1). **(02,5pts)**

3) En supposant que trois des plans trouvés au 1) ont un point commun, montrer que tous les plans $(A_i\, B_j\, C_k)$, $i + j + k = 6$, sont concourants. **(01,5pt)**

PROBLEME-II (15 points)

On donne les définitions suivantes :

1) Une partie non vide E du plan (P) est dite convexe lorsque :
si A et B sont deux points quelconques de E, alors $[AB] \subset E$.

2) Epigraphe d'une fonction : f étant une fonction numérique d'une variable réelle, on appelle épigraphe de f, l'ensemble des points M(x,y) du plan (P) muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tels que $y \geq f(x)$, et on note $Ep(f) = \{M(x,y) \in (P) \;/\; y \geq f(x)\}$.

3) Fonction convexe : Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque Ep(f) est une partie convexe du plan (P) ; f est concave lorsque -f est convexe.

A. On se propose de montrer que :

$$[f \text{ convexe}] \Leftrightarrow [\forall(x_1,x_2) \in Df \times Df,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ \lambda+\mu = 1 \Rightarrow f(\lambda x_1+\mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)]$$

1) On suppose f convexe et on considère deux points $M_1(x_1,f(x_1))$ et $M_2(x_2,f(x_2))$ appartenant à la courbe (C_f).

a) Montrer que $[M_1M_2] \subset Ep(f)$. **(0,5 pt)**

b) Soit M le barycentre de $\{(M_1,\lambda) ; (M_2,1-\lambda)\}$, $\lambda \in [0,1]$. **(0,5 pt)**

Montrer que $M \in Ep(f)$ et en déduire que $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

En déduire que si f est convexe, $\forall x_1 \in Df$; $\forall x_2 \in Df$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall \mu \geq 0$, avec $\lambda + \mu = 1$, alors $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$.

2) On suppose que : $\forall (x_1, x_2) \in Df \times Df$, $\forall\lambda \geq 0$, $\forall\mu \geq 0$, si $\lambda + \mu = 1$ alors $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$.

Soit $M_1 (x_1, y_1) \in Ep (f)$, $M_2 (x_2, y_2) \in Ep (f)$.

Pour tout point M (x,y) du segment $[M_1 M_2]$, montrer qu'il existe λ dans [0,1], tel que M soit le barycentre de $\{(M_1,\lambda) ; (M_2, 1 - \lambda)\}$.

En déduire que $M \in Ep(f)$ et que f est convexe. **(0,75 pt)**

B. 1) Montrer que quels que soient A(a,f(a)) et B(b,f(b)) points de C_f tels que $a < b$, f est convexe si et seulement si : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq d(x)$, $y = d(x)$ étant l'équation réduite de la droite (AB). **(0,75 pt)**

2) Montrer que si f est convexe alors :

$\forall(x_1,x_2,\ldots, x_n) \in Df \times Df \times \ldots \times Df$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^+ \times R^+ \times \ldots \times R^+$, si $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$,

alors $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$ **(0,5 pt)**

C. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I

On considère la fonction $p_a : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I - \{a\}$, $p_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On se propose de montrer que :

f est convexe sur I si et seulement si p_a est croissante sur $I - \{a\}$, pour tout a de I.

1) .On suppose f convexe.

Soit $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_1<x_2$, x un élément de $]x_1, x_2[$

a) Montrer qu'il existe λ dans]0,1[tel que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. **(0,25 pt)**

b) En déduire que : $\forall x_1 \in I$, $\forall x_2 \in I$ si $x_1 < x_2$ alors :

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ (1) \text{ et que } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \ (2).$$ **(0,5 pt)**

c) $\forall t\in I$, $\forall t' \in I$, si $a < t < t'$, montrer que : $(1) \Rightarrow p_a (t) \leq p_a (t')$.

Si $t < t' < a$, montrer que $(2) \Rightarrow p_a (t) \leq p_a (t')$.

Si t < a < t', montrer que : (1) $\Rightarrow \dfrac{f(a)-f(t)}{a-t} \leq \dfrac{f(t')-f(t)}{t'-t}$ et que

(2) $\Rightarrow \dfrac{f(t')-f(t)}{t'-t} \leq \dfrac{f(t')-f(a)}{t'-a}$. **(0,5 pt)**

En déduire que : $\forall$ t$\in$ I, $\forall$ t' $\in$ I, si t < t' alors $p_a(t) \leq p_a(t')$.
Conclure.

3) On suppose que p_a est croissante sur I - {a}, $\forall$ a $\in$ I.
$\forall (x_1, x_2) \in I^2$, si $x_1 < x_2$ et $x \in]x_1, x_2[$, on sait qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

Montrer que $f(x) \leq f(x_1) + \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2) - f(x_1)]$.

En déduire que f est convexe.

D. Soit f une fonction convexe définie sur]0, +∞[, croissante et non constante sur]0, +∞[.

1) Soit: p : x $\mapsto$ p(x) = $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Montrer que p est croissante sur]0, +∞[- {1}. **(0,25 pt)**

2) Montrer qu'il existe a dans]0, +∞[- {1}, tel que f (a) ≠ f(1) et que p (a) > 0. **(0,5 pt)**

3) On suppose x > 1 et x > a.
Montrer que f(x) ≥ (x -1) p (a) + f(1) et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. **(0,5pt)**

E. 1) On suppose f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; soit a $\in$ I.
En utilisant le B. montrer que : $\forall$ t $\in$ I, t < a $\Rightarrow p_a(t) \leq f'(a)$
$\forall$ t $\in$ I, t > a $\Rightarrow p_a(t) \geq f'(a)$. **(0,75 pt)**

2) a) On suppose f dérivable et convexe sur I.
Quels que soient x_1 et x_2 dans I, comparer $p_{x_1}(x_2)$ et $p_{x_2}(x_1)$ **(0,25 pt)**
Si $x_1<x_2$, montrer que $f'(x_1) \leq p_{x_1}(x_2)$ et $p_{x_2}(x_1) \leq f'(x_2)$ **(0,25 pt)**
En déduire que f' est croissante sur I. **(0,25 pt)**

b) On suppose f dérivable sur I et f' croissante sur I. **(0,75 pt)**
Quels que soient x_1 et x_2 dans I, soit λ dans] 0,1[et $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, avec $x_1 < x_2$.
- Montrer que $x_1 < x < x_2$.
- Montrer qu'il existe c_1 dans] x_1, x [, tel que : $f(x) - f(x_1) = (x-x_1) f'(c_1)$ et qu'il existe c_2 dans] x, x_2[, tel que : $f(x_2) - f(x) = (x_2 - x) f'(c_2)$.
- Montrer que $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ et en déduire que f est convexe sur I.

On vient d'établir donc que [f convexe et dérivable sur I] $\Leftrightarrow$ [f dérivable sur I et f' croissante sur I].

3) On suppose f deux fois dérivable sur I.
a) Montrer que f est convexe sur I si et seulement si : $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. **(0,5 pt)**
b) Montrer que f est concave sur I si et seulement si : $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$. **(0,25 pt)**

4) Soit f dérivable sur I.
a) En comparant $p_a(x)$ et $f'(a)$, montrer que si f est convexe sur I, (C_f) est au-dessus de toutes ses tangentes. **(0,25 pt)**

b) Réciproquement supposons f dérivable sur I et que (C_f) est au-dessus de sa tangente (T) au point $A(a,f(a))$, pour tout a dans I.
Montrer que : $\forall a \in I, \forall b \in I, f(b) \geq f(a) + (b - a) f'(a)$ et $f(a) \geq f(b) + (a - b) f'(b)$. **(0,5pt)**
En déduire que $(b - a) [f'(b) - f'(a)] \geq 0$ et que f est convexe sur I. **(0,25 pt)**

F.1) Montrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$;
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 2e^{x/2} - 1$. **(0,5pt)**

2) Montrer que la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est convexe sur $[0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **(0,25 pt)**
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$. **(0,25 pt)**

3) a) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. La moyenne arithmétique de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, leur moyenne géométrique est $g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ et leur moyenne harmonique h vérifie $\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$.

Montrer que la fonction ln est concave et que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. **(0,25 pt)**

En déduire que $g \leq a$ et que $h \leq g \leq a$. **(0,25 pt)**

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, x^n - 1 \geq n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right)$. **(0,5pt)**

4) Etant données f convexe sur $\mathbb{R}$ et g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que gof est convexe sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$; montrer que si lnof est convexe, alors f est convexe. **(0,5 pt)**

6) Soit f convexe et majorée sur $\mathbb{R}$; soit $p_a :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec $p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} p_a(x) = 0$ et en déduire que : $\forall x > a, p_a(x) \leq 0$ et que f est décroissante sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

b) Soit $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$

Montrer que g est convexe et majorée et en déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

c) Déduire de ce qui précède que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante sur $\mathbb{R}$. Montrer que cette propriété n'est pas vraie sur $]0, +1[$ en considérant
$f : x \mapsto f(x) = -\ln(1+x)$. **(0,5 pt)**

7) Soit f convexe sur $]0, +\infty[$.

a) En utilisant la fonction $p_1 :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto p_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

et $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x} + \frac{f(1)}{x}$, montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$$ **(0,5 pt)**

b) On suppose que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell, \ \ell \in \mathbb{R}$

Soient x et y tels que $0 < x < y$; soit $p_x :]x, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$t \mapsto p_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Montrer que $\lim_{t \to +\infty} p_x(t) = \ell$ et en déduire que la fonction

$h : x \mapsto h(x) = f(x) - \ell x$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. **(0,5 pt)**