SCIENCE EN HERBE MATHS TERMINALE S1 & S3

SERIE N°1-2: PROBABILITE

Exercice 1 :

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boites chaque boite pouvant contenir de 0 à n boules). On désigne par p_n la probabilité que chaque boite contienne exactemant1 boule .Montrer que $p_n = \frac{n!}{n^n}$.
3. En utilisant le 1), montrer que pour tout entier naturel $n \succ 0$, on a : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$.

En déduire que $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Quelle est la limite de p_n quant n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 :

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher.
On tire successivement 3 boules, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :

- '' Obtenir une boule blanche pour la première fois au troisième tirage''
- ''Ne pas obtenir consécutivement 2 boules de la même couleur''
- '' Ne pas obtenir 3 boules de la même couleur ''.

Exercice 3 :

Une urne contient 5 jetons blancs (un carré, trois ronds et un triangle), quatre jetons noirs (trois carrés et un triangle) et trois jetons rouge (un carré et deux ronds).
On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :
   a. trois jetons de couleurs différentes.
   b. trois jetons de formes différentes.
   c. trois jetons de même forme.
   d. trois jetons de même couleur.
   e. trois jetons de même forme et de même couleur.
   f. trois jetons de formes différentes et de couleurs différentes.
   g. un jeton d'une couleur et deux d'une autre.
   h. exactement deux jetons noirs et un carré.

Exercice 4 :

Un questionnaire comprend n questions ($n \geq 6$) : 4 d'algèbre, 2 de géométrie et le reste d'analyse.
Un élève tire au hasard et simultanément 3 questions.
On note les événements suivants.
A = tirer exactement 2 questions d'algèbre.
B= tirer exactement 1 question de géométrie.
C= tirer exactement 2 questions d'algèbres et une de géométrie.

1. Calculer en fonction de n les probabilités de A, B et C.
En déduire celle de AUB.
2. Déterminer n pour que P(AUB) = 2 P(A).

Exercice 5 :

Un panier contient 18 boules : 5 blanches, 6 rouges, 7 noires. Ces boules sont numérotées de façon à les rendre reconnaissables même avec la même couleur. On aura ainsi les boules $B_1, B_2, B_3, ..., B_5, N_1, N_2, ..., N_7, R_1, ..., R_7$. n étant un entier supérieur ou égal à 4, on répartit les 18 boules dans n urnes numérotées de 1 à n , certaines urnes pouvant rester vides.

1. Quel est le nombre de répartitions possibles ?

2. Quel est le nombre de répartitions vérifiant la condition suivante (notée C_1) :
« L'urne 1 contient exactement trois boules noires »

3. Quel est le nombre de répartitions remplissant la condition C_1 et les deux autres conditions suivantes :
C_2: « l'urne 2 contient exactement trois boules blanches »
C_3: « l'urne 3 contient exactement deux boules rouges »

4. Quel est le nombre de répartitions possibles telles que toutes les boules soient dans deux urnes exactement ?

5. Soit $p \in \{5;6;7\}$. Montrer que : $\sum_{k=1}^{p} C_p^k (n-1)^{18-k} = (n-18)^{18-p}(n^p - (n-1)^p)$.

En déduire le nombre de répartitions telles que l'urne 1 contienne des boules d'une seule couleur ?

Exercice 6 :

Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant, qui se présente comme une succession de parties.
Au départ A et B misent chacun 1€ et lancent chacun une pièce parfaitement équilibré.

- Si A a pile et B face, le joueur A gagne et vis versa.
- Si non la partie est nulle, les jours double leur mise et engagent une nouvelle partie. Et ainsi jusqu'à ce qu'il y'ai de gagnant, ou que la 20$^{\text{ième}}$ partie soit nulle (les joueurs reprennent leur mise)

Pour tout n allant de 1 à 19, on considère les événements :
A_n : Le jeu se termine à la n$^{\text{ième}}$ partie et le joueur A gagne
B_n : Le jeu se termine à la n$^{\text{ième}}$ partie et le joueur B gagne
H_n : la n$^{\text{ième}}$ partie soit nulle.
On pose $x_n = P(A_n), y_n = P(B_n), z_n = P(H_n)$.

1) Montrer que $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

2) On considère la variable aléatoire X « nombre d'euro de la mise lors de la partie qui conclu le jeu. Lorsque le jeu se termine à la partie k on X= 2^k.
a. Donner l'expression de la plus grande valeur que peut prendre X.
b. calculer P(X= 2^{20}).

c. Pour tout n allant de 1 à 19, exprimer l'événement X= 2^k en fonction de A_k et B_k.

En déduire $P(X = 2^k)$.

d. Calculer E(X).

Exercice 7 :

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B. les quatre faces de chacun d'eux sont notées 1 à 4. Lorsque l'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé a, les quatre numéros sont tous de la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité P_i de noter le numéro i est proportionnelle à i.

1. Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 pour les quatre faces de B.
2. On lance les deux dés. On note i le numéro de caché du dé A et j le numéro caché du dé B
On suppose les lancers indépendants ; on note P (i, j) la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.

a. Montrer que $P(1,1) = P(2,1) = P(3,1) = P(4,1) = \frac{1}{40}$.

b. Déterminer les probabilités P (i, j) pour tous les nombres entiers i et j compris entre 1 et 4.
3. On appelle Z la variable aléatoire définie par : Z (i, j) est le plus grand des nombres i et j.
Exemple : Z (1, 2) = 2,   Z (2, 1) = 2   Z (1,1) = 1.
a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
b. Déterminer la loi de probabilité de Z et espérance mathématique E (Z).

Exercice 8 :

On considère deux dés cubiques, D_1 et D_2, à six faces numérotées de 1 à 6. Les faces de chacun de ces dés ont toute la même probabilité d'apparition. On jette successivement D_1 puis D_2 . On désigne par A, B, C les événements suivants :

A : « le dé D_1 affiche le numéro 1 »

B : « la somme des numéros affichés est 7 »

C : « les deux numéros affichés sont égaux »

1) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et C.

2) Calculer les probabilités de $A \cap B$ et de $A \cap C$.

3) Calculer la probabilité de $B \cap C$.

4) Calculer les probabilités de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, puis de $(A \cup B \cup C)$.

Exercice 9 :

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A ; P(B/A) la probabilité de B sachant que A est réalisé .

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité : pi = P(X = i)

i	0	1	2
P_i	0,1	0,5	0,4

a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
b. Calculer l'espérance mathématique de X .
2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
C1 : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
C2 : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence »
a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.
b. Montrer que P(E/C2) = 0,42 et calculer $P(C_2 \cap E)$.
c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

Problème 1 :

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».
Partie A :
On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.
Partie B :
On note *n*, *b* et *r* le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.
1. On note *g* (*n*, *b*, *r*) la probabilité en fonction de *n*, *b* et *r* de l'évènement G.
Démontrer que $g(n,b,r) = \frac{1}{210}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$.
2. Le but de cette question est de déterminer *n*, *b* et *r* afin que la probabilité *g* (*n*, *b*, *r*) soit minimale.
L'espace est muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$orthonormal.
Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (15 ; 0 ; 0), (0 ; 15 ; 0) et (0 ; 0 ; 15) et soit *M* le point de coordonnées (*n*, *b*, *r*).

a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.
b. En déduire que le point *M* est un point du plan (NBR).
c. Démontrer que *g* (*n*, *b*, *r*)=$g(n, b, r) = \frac{1}{210}(OM^2 - 15)$
d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.
e. En déduire tes valeurs de n, $b$et r afin que la probabilité $g\ (n, b, r\ )$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à$\frac{2}{7}$

Partie C :

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit$\frac{2}{7}$
Un joueur mise $x$euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit $k$fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien. On note Xla variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
1. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.
2. Déterminer la valeur de $k$pour laquelle le jeu est équitable.