SERIE N°1-1: LIMITES, CONTINUITES ET DERIVATION

Exercice 1 : Etudier les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{2x-1}$; $n\in\mathbb{N}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}+ax,\ a\in\mathbb{R}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin[sin(sinx)]}{x}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to 0}xE\left(\frac{1}{sinx}\right)$;e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(1-cosx)}{sin(x^2)}$, $f)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2sin[tan(x^2)]}{1-cos(x^2)}$;$g)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{sin(\frac{\pi}{6}-x)}{1-2sinx}$, $h)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-sinx}{\sqrt{1-cosx}}$;

$i)$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{sin(x^2)-sin(ax)}{x-a}$,$j)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(sin\frac{1}{x}+1-cos\frac{1}{x}\right)$;k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tanx$;$m)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2cos2x+1}{2cosx-1}$

$n)$ $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt[3]{x+54}-4}{2\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{20x+16}}$; $o)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+sinx-cosx}{1-sinx-cosx}$, $p)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{tanx}$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right),\ \ si\ \ x\in\mathbb{R}-\{0\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2) Etudier la continuité de f en $\frac{1}{p}$ avec $p\in\mathbb{N}\ et\ p\geq 2$
3) Etudier la continuité de f en 1.

Exercice 3 :

Soit $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\ \ pour\ x\neq 0\ \ et\ \ f(0)=0$

1) Etudier la continuité de f.
2) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}
3) Représenter la courbe de f et celle de f^{-1}

Exercice 4 :

1) Soit a et b deux nombres réels, f la fonction définie par : $f(x)=ax+b-\sqrt{x^2+1}$
a) Etudier la limite de f en $+\infty$
b) Déterminer a et b pour que la droite (D): $2x-y+2=0$ soit asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$
2) Déterminer les réels m et p pour que la fonction g soit continue sur son domaine :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{m\sqrt{x^2+3}-2m|x|}{x^2-1}\ \ si\ |x|\neq 1 \\ g(x)=2x^3+px+1\ \ si\ x=1 \end{cases}$$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2sin\frac{1}{x}$

1) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer f' et g'. g' est-elle le prolongement par continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

1) Déterminer le nombre de solution de l'équation :
   (E): $x^2=x^3+\frac{1}{27}$
2) Déterminer un encadrement à 10^{-2} prés de chacune d'elles
3) En déduire le signe de la fonction $f(x)=-x^3+x^2-\frac{1}{27}$

Exercice 7 : On considère l'équation (E): $\left|x\sqrt{1-x}\right|=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

1) Démontrer (E) admet trois solutions $x_1,\ x_2\ \ et\ \ x_3$ telles que :
   $-\frac{1}{3}<x_1<0\,;0<x_2<\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}<x_3<1$

2) On pose $u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right), i \in \{1; 2; 3\}$. Démontrer qu'il existe un unique réel $\theta_i \in [0;\ \pi]$ $tel\ que\ u_i = cos\theta_i$

3) Démontrer que $\theta_1,\ \theta_2\ et\ \theta_3$ sont solution de l'équation : $cos3\theta = \frac{1}{2}$

4) En déduire les solutions de (E).

Exercice 8 : Soit f continue sur $[0; 1]$ telle que $f\langle[0; 1]\rangle \subseteq [0; 1]$

1) Démontrer qu'il existe qu'il existe un réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2) On suppose f dérivable sur $[0; 1]$ $et\ |f'(x)| < 1, \forall\ x \in [0; 1]$.

a) Démontrer que α est l'unique solution $f(x) = x\ \ sur\ [0; 1]$

b) Montrer que ce n'est pas toujours le cas si la condition n'est pas remplie.

c) Soit (u_n) la suite définie par $u_1 \in [0; 1], u_{n+1} = f(u_n)$

- Démontrer qu'il existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que : $|u_{n+1} - \alpha| < k|u_n - \alpha|$
- En déduire que (u_n) converge.

Exercice 9 :

Soit $f: [0;\ \pi] \longrightarrow [-1; 1]$ et

$x \longmapsto cosx$

$g: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto tanx$

1) Montrer que f et g admettent des bijections réciproques respectivement $arccos$ et $arctan$.

2) Déterminer les dérivées de $arccos$ et $arctan$.

3) Montrer que :

a) $\forall\ x \in [-1; 1],\ on\ a: arccosx + \arccos(-x) = \pi$

b) $\forall\ x \in [-1; 1], on\ a:\ arccosx + arcsinx = \frac{\pi}{2}$

c) $\forall\ x \in]0; +\infty[, on\ a:\ arctanx + arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = sin^2x$

1) Expliciter pourquoi on peut choisir $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme domaine d'étude.

2) Démontrer que la restriction de f à I admet une fonction réciproque f^{-1}.

3) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et montrer que : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

Exercice 11 :

Soit $f(x) = \frac{1}{cosx}$

1) Déterminer le domaine de définition de f et expliciter pourquoi on peut prendre $I = \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ comme domaine d'étude.

2) Etudier les variations de f tracer sa courbe.

3) Montrer f est une bijection de I vers J à préciser.

4) L'application réciproque f^{-1} de f est-elle dérivable sur J ?

5) Dans le cas où f^{-1} est dérivable, montrer que : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{cos2x}}$

1) Montrer que f est deux fois dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right[$

2) Montrer que pour tout $x \in I, on\ a: f"(x) + f(x) = 3f^{(5)}(x)$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

1) Déterminer les réels a et b tels : que:$\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

2) Justifier que f est n fois dérivable et $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!P_n(x)}{2(x^2-1)^{n+1}}, n \neq 0$ où P_n est un polynôme de degré n à préciser.

Exercice 14 :

1) Préciser dans chaque cas, si la fonction f satisfait sur $I = [a; b]$ aux conditions du théorème des accroissements finis. Si oui déterminer explicitement les réels c tels que :
$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

a) $f(x) = 2x - sinx, I = [0; \pi]$

b) $\begin{cases} f(x) = 2x^2, & si\ x \leq 1 \\ f(x) = x^3 + 2, x > 1 \end{cases}$, $I = [0; 2]$

2) Soit $f(x) = x - cosx$

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[$

b) Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]\alpha; \frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) f'(c)$

c) Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$, en déduire que : $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \alpha < \frac{\pi}{4}$

3) Démontrer que quelque soient les réels $\alpha\ et\ \beta\ tel\ que : 0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ on a :

$$\frac{\alpha - \beta}{cos^2\beta} \leq tan\alpha - tan\beta \leq \frac{\alpha - \beta}{cos^2\alpha}$$

Exercice 15 : Soit $f(x) = 2cosx - cos2x$

1) Justifier le choix de l'intervalle $I = [0; \pi]$ comme domaine d'étude
2) Etudier les variations de f sur I.
3) Soit g la restriction de f à I.

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers J à préciser.

b) Etudier les variations de g et tracer sa courbe.

c) Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$, $(g^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(g^{-1})'(1)$

d) Calculer $cos(g^{-1}(t))$ et $sin(g^{-1}(t))$ en fonction de t.

Exercice 16 : On considère la fonction f définie de $\left[O; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{tanx}$

1) Etudier les variations de f
2) Montrer que : $\forall\ x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = [1 + f^4(x)]\left(\frac{1}{2f(x)}\right)$
3) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition.
4) Préciser sur quel ensemble f^{-1} est-elle dérivable ? et déterminer $(f^{-1})'(x)$
5) Tracer les courbes de f et de f^{-1}.

Exercice 17 : Soit g la fonction définie par : $g(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1) Etudier complètement g. (tracer sa courbe C, repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$unité 8 cm
2) Montrer que g est une bijection de D_g vers un ensemble à préciser. Tracer la courbe C' de g^{-1}
3) Déterminer l'abscisse x_0 du point d'intersection autre que O de C et C'
4) Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :$x^3 + xy^2 - y^2 = 0$.

Exercice 18 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|}, & si\ x > 0 \\ f(x) = x\sqrt{\frac{x-2}{x}}, & x < 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine.
2) Donner la nature des branches infinies de la courbe de f.
3) Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à ses asymptotes.
4) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
5) Soit g la restriction sur $I = \left]-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers J à préciser.

b) La fonction g^{-1} est-elle dérivable sur J ?
c) Donner les variations de g^{-1} et préciser les branches infinies à sa courbe.
d) Donner une équation de la tangente à $\left(C_{g^{-1}}\right)$ au point d'abscisse $-\sqrt{3}$
e) Donner l'expression g^{-1} sur $\left[O;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
6) Tracer les courbes $\left(C_g\right)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$

Exercice 19 : Soit f_m la fonction définie par : $f_m = \frac{x^2+3x+4m}{x^2+(5m+1)x+3}$ et (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes.
2) Déterminer m pour que (C_m) coupe son asymptote horizontale en au point P d'abscisse $\frac{3}{2}$.
3) Donner le nombre de points d'intersection de (Δ_t):avec (Δ_t): $y = tx$
4) Montrer que les points d'abscisse x tels que $f''(x) = 0$ sont alignés.
5) La droite (Δ_t) coupe (C_m) en deux points A et B distincts de O. Déterminer l'ensemble des points I milieu de $[AB]$

Exercice 20 :

1) En utilisant l'inégalité des accroissements finis montrer que $\forall\ x \geq 0$ on a : $-x \leq sinx \leq x$
2) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que si $\forall\ \ x \geq 0, f'(x) \leq g'(x)\ alors\ f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$
b) En déduire que $\forall\ x \geq 0, on\ a: 1 - \frac{x^2}{2} \leq cosx \leq 1 + \frac{x^2}{2}$
c) Montrer que les inégalités obtenues en b) sont vraies pour tout réel x
3) On sait que $cosx \leq 1$, on conservera donc les inégalités $1 - \frac{x^2}{2} \leq cosx \leq 1$. Appliquer suffisamment de fois le processus précédent pour montrer que pour tout réel x on a :
$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq cosx \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$.

Exercice 20 : On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) Justifier que pour tout réel x, il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[\ \ tel\ que\ x = tan\alpha$
2) On pose$g(\alpha) = f(tan\alpha)$.
a) Déterminer $g(\alpha)$ sous la forme la plus simple.
b) Montrer que g est une bijection de $\left]-\frac{2}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle J à préciser.
c) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle J.
3) Soit la fonction φ définie par : $\varphi(\alpha) = tan\alpha - g(\alpha)$
a) Montre que l'équation $(\alpha) = tan\alpha$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ admet une solution unique dont on donnera une valeur approchée à $0{,}1\ prés$.
b) En déduire la résolution de l'équation : $f(x) = x$. Donner une valeur approchée de la solution à $0{,}1\ prés$.

Exercice 21 : On considère la fonction f définie sur $I = [0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1) Etudier les variations de f sur I.
2) Soit F la primitive de f sur I tel que $F(0) = 0$. On ne cherche pas une expression $F(x)$.
a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur I ?
b) Quelles sont les variation de F sur I ?
3) On définit sur I les fonctions H et K par : $H(x) = F(x) - x\quad et\ \ K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$
a) Etudier les variations de H et K sur I
b) En déduire que pour tout $x \geq 0,$ on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4) Démontrer que l'équation : $F(x) = \pi$ admet une unique solution α vérifiant : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

Exercice 22 :

1) On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + 1 - \frac{2}{\pi}cotan\pi x$

a) Déterminer le domaine de définition de g.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]n; n+1[$, on désigne par g_n la restriction de g l'intervalle $]n; n+1[$. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]n; n+1[$: $g_n(x) = g_0(x-n) + 2n$
c) Etudier les variations de g_0 puis celle de g_n pour $n \in \mathbb{N}^*$
d) Démontrer que g_n est une bijection de $]n; n+1[$,vers un intervalle à préciser.
e) En déduire le nombre de solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $]n; n+1[$.
2) On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}[1-(2x+1)cos\pi x]$
a) Démontrer que pour tout x non entier on a : $f'(x) = \left(\frac{\pi}{4}sin\pi x\right)g(x)$
b) Etablir le tableau de variation de f sur $]n; n+1[$
NB :on distinguera les deux cas n pair et n impair
c) Démontrer que pour tout x réel on a : $-\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
d) Tracer la partie de la courbe de f correspondante à $x \in [0; 5]$

Exercice 23 : Soit $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$ et $\varphi(x) = \frac{1-sin^2x}{2+sinx}$

1) Etudier les variations de f et montrer que (C_f) admet un centre de symétrie.
2) Déterminer l'ensemble de définition de φ et calculer $\varphi(\pi - x)$.
3) Expliquer pourquoi on peut prendre pour domaine d'étude $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
4) Donner les variations de f' sur $[-1; 1]$, préciser l'image de $[-1; 1]$ par f'.
5) Montrer que $\varphi'(x) = f'(sinx)cosx$

6- a) Montrer l'existence et l'unicité d'une racine unique α de φ' sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

b)Montrer que $sin\alpha = -2 + \sqrt{3}$ et en déduire la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$

7) Etudier les variations de φ tracer sa courbe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (unité 10 cm)
8) Montrer que $\varphi(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
9) Montrer que x_0 est la seule solution de $\varphi(x) = x$ dans $\mathbb{R}$.
10) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in IN, u_{n+1} = \varphi(u_n)$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$
b) Montrer que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.
c) Montrer que $\left|u_{n+1} - x_0 \leq \frac{2}{3}|u_n - x_0|\right|$ en déduire la convergence de (u_n)