Avril 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Problème I.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, Pour un entier $d \geq 1$, on note par $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre d.

1- Soit $A \in \mathcal{M}_d$. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est que son polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_d)$ soit scindé :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^d \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

et que pour tout $1 \leq k \leq r$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_d)$ soit de dimension α_k.

2- Pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \big(P\, M_n\big)(i,j) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{d} p_{ik}\, m_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{d} p_{ik}\, m_{kj} = \big(P\, M\big)(i,j).$$

De même,

$$\lim_{n \to +\infty} \big(M_n\, P\big)(i,j) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{d} m_{ik}(n)\, p_{kj} = \sum_{k=1}^{d} m_{ik}\, p_{kj} = \big(M\, P\big)(i,j)\,,$$

ce qui donne le résultat.

3- Dans toute cette partie, nous considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) On note $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $R = \dfrac{1}{6}\, I_2$.

Le polynôme caractéristique de la matrice Q est donné par

$$\chi_Q(\lambda) = (\lambda - 1/3)^2 - 1/4 = (\lambda - 5/6)\,(\lambda + 1/6).$$

D'après la condition suffisante rappelée dans la question **1-**, Q est diagonalisable. Il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_2$ inversible telle que $Q = P\,D\,P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}$.

Il s'en suit que

$$Q^n = P\,D^n\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} (5/6)^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En utilisant la question **2-**, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} Q^n = \lim_{n \to +\infty} P \begin{pmatrix} (5/6)^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Les valeurs propres de $I_2 - Q$ sont $1 - 5/6 = 1/6$ et $1 + 1/6 = 7/6$. 0 n'est pas valeur propre de $I_2 - Q$, donc $I_2 - Q$ est inversible.
Notons $S_n = I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n$, on a

$$(I_2 - Q)\, S_n = (I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) - (Q + Q^2 + \cdots + Q^{n+1}) = I_2 - Q^{n+1}\,.$$

En utilisant la question **2-**, il vient

$$(I_2 - Q) \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (I_2 - Q^{n+1}) = I_2\,.$$

On obtient finalement

$$\lim_{n\to+\infty} (I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) = (I_2 - Q)^{-1}\,.$$

c) Désignons par O la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) La matrice A se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la façon suivante

$$A = \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I_2 \end{pmatrix}\,,$$

en faisant un produit par blocs, on a $A^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R(I_2 + Q) & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R\,S_1 & I_2 \end{pmatrix}$.
Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix}$.
Cette égalité est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n \geq 1$, alors

$$A^{n+1} = A^n\, A = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R\,S_{n-1}\,Q + R & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R\,S_n & I_2 \end{pmatrix}\,,$$

la formule est donc vraie au rang $n + 1$.

(ii) D'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} O & O \\ R\,(I_2 - Q)^{-1} & I_2 \end{pmatrix}\,.$$

Après calculs on obtient

$$I_2 - Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}\,; \qquad (I_2 - Q)^{-1} = \frac{1}{4/9 - 1/4} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et

$$R\,(I_2 - Q)^{-1} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

4- Dans cette partie, on fixe une base de $\mathbb{R}^d$, $d > 1$. On convient de noter de la même façon un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et la matrice colonne à d lignes associée à ce vecteur. Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d$.

a) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda\, I_d) = \det\left({}^t(A - \lambda\, I_d)\right) = \det\left({}^tA - \lambda\, I_d\right).$$

Donc λ est valeur propre de A si et seulement si elle est valeur propre de ${}^tA$. En particulier, A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

b) Soit x (resp. y) un vecteur propre de A (resp. ${}^tA$) associé à la valeur propre λ (resp. μ), alors $A\,x = \lambda\,x$ et ${}^tA\,y = \mu\,y$. On a, d'une part ${}^ty\,A\,x = {}^ty\lambda\,x = \lambda{}^ty\,x = \lambda\sum_{k=1}^d x_k y_k$ et d'autre part, ${}^t\left({}^ty\,A\,x\right) = {}^tx{}^tAy = {}^tx\mu\,y = \mu\sum_{k=1}^d x_k y_k$.
Puisque ${}^ty\,A\,x$ est un réel, ces deux dernières quantités sont égales. Donc $\lambda \neq \mu$ implique ${}^ty\,x = 0$.

c) On suppose désormais que A possède d valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ et vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$.
On note x_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et y_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à cette même valeur propre.

(i) Montrer que $(x, y) \mapsto (x|y) = {}^ty\,x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

(*) Linéarité à gauche : $\forall(\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$(\lambda\,x_1 + x_2|y) = {}^ty\,(\lambda\,x_1 + x_2) = \lambda\,{}^ty\,x_1 + {}^ty\,x_2 = \lambda\,(x_1|y) + (x_2|y).$$

(*) Symétrie : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (y|x) = {}^tx\,y = {}^t\left({}^tx\,y\right) = {}^ty\,x = (x|y)$,
car ${}^tx\,y$ est égale à sa transposée (c'est un réel).

(*) Elle est définie positive : soit $x \in \mathbb{R}^d$, notons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ sa représentation dans la base de $\mathbb{R}^d$ fixée par l'énoncé. On a ${}^tx\,x = \displaystyle\sum_{k=1}^d x_k^2$, cette dernière quantité est strictement positive sauf si $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $(x_1, \cdots, x_d)$ est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^d$. C'est une base, car elle possède d éléments dans $\mathbb{R}^d$ qui est de dimension d.

(iii) Soit $1 \leq k \leq d$. y_k est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_k. D'après la question **4, b)**, ${}^ty_k x_i = 0$, pour tout $i \neq k$, donc y_k est orthogonal au sous espace vectoriel engendré par $\{x_i\,,\quad i \neq k\}$. Le réel ${}^ty_i x_i$ est alors non nul, en effet si ${}^ty_i x_i = 0$, on aurait que y_k serait orthogonal à tous les vecteurs de la base $\{x_1, \cdots, x_d\}$, donc $y_k = 0$, contradiction.
Notons $a_k = {}^ty_k x_k$ et $y'_k = \dfrac{y_k}{a_k}$, on obtient ainsi un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_k et ${}^ty'_k x_k = 1$. On peut donc choisir la famille $\{y_1, \cdots, y_d\}$ de sorte que ${}^ty_k x_k = 1$ pour tous $1 \leq k \leq d$.

d) Soit $(i, j) \in \{1, \cdots, d\}^2$. Si $i \neq j$, $A_i\,A_j = (x_i{}^ty_i)\,(x_j{}^ty_j) = x_i({}^ty_i\,x_j){}^ty_j = 0$, car ${}^ty_i\,x_j = 0$ et pour $i \in \{1, \cdots, d\}$, on a $A_i^2 = (x_i{}^ty_i)\,(x_i{}^ty_i) = x_i({}^ty_i\,x_i){}^ty_i = x_i{}^ty_i = A_i$, car ${}^ty_i\,x_i = 1$.
On peut donc conclure que pour tous $1 \leq i, j \leq d$, $A_i\,A_j = \delta_{ij}\,A_i$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

e) Puisque $(x_1, \cdots, x_d)$ est une base, pour montrer que $\sum\limits_{i=1}^{d} A_i = I_d$ il suffit de montrer que $\big(\sum\limits_{i=1}^{d} A_i\big)\, x_k = I_d\, x_k$ pour tout $1 \leq k \leq d$. Soit $k \in \{1, \cdots, d\}$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right) x_k = \sum_{i=1}^{d} A_i\, x_k = \sum_{i=1}^{d} (x_i\, {}^t y_i)\; x_k$$
$$= \sum_{i=1}^{d} x_i\, ({}^t y_i\; x_k) = \sum_{i=1}^{d} x_i\, \delta_{ik} = x_k = I_d\, x_k\,.$$

On procède de la même manière pour montrer que $\sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i = A$. Pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i\right) x_k = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i\, x_k = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, (x_i\, {}^t y_i)\; x_k$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, x_i\, ({}^t y_i\; x_k) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, x_i\, \delta_{ik} = \lambda_k\, x_k = A\, x_k\,.$$

f) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $A^n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i$.
L'égalité est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie pour n, alors

$$A^{n+1} = A^n\, A = \Big(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i\Big) \Big(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j\, A_j\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \lambda_i^n\, \lambda_j\, A_i\, A_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \lambda_i^n\, \lambda_j\, \delta_{ij}\, A_i$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n+1}\, A_i\,,$$

l'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.
Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) On a $\dfrac{1}{\lambda_1^n}\, A^n = A_1 + \sum\limits_{i=2}^{d} \dfrac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n}\, A_i$. Or, pour tout $i \geq 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda_1^n}\, A^n = A_1$.

h) Montrons que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\lambda_1 \in]-1, 1]$.
Montrons que la condition est suffisante :
– si $\lambda_1 = 1$, alors d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = A_1$;
– si $\lambda_1 \in]-1, 1[$, alors comme $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$, tous les λ_i sont dans $]-1, 1[$, et $A^n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i$ tend vers 0.
Montrons que la condition est nécessaire :
si $|\lambda_1| > 1$, ou si $\lambda_1 = -1$ alors $A^n = \lambda_1^n\, \left(\frac{1}{\lambda_1^n}\, A^n\right)$ ne tend pas vers une limite, puisque $\frac{1}{\lambda_1^n}\, A^n$ tend vers la limite non nulle A_1 et que $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Conclusion : $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lambda_1 \in]-1,1]$ avec $\lim_{n\to\infty} A^n = A_1$ si $\lambda_1 = 1$ et $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ si $|\lambda_1| < 1$.

5- On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et la formule de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} &= u_n + \ \ v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Montrons par récurrence que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n.
On a $u_0 = v_0 = 1$, donc c'est vrai pour $n = 0$.
Supposons que pour $n \geq 0$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$; alors, $u_{n+1} = u_n + 2v_n > 0$ et $v_{n+1} = u_n + v_n > 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont strictement positifs.

b) Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors la relation (1) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ \\ v_n \end{pmatrix}.$$

c) Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 2$. Ses valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.
La matrice A est un élément de $\mathcal{M}_2$ et admet deux valeurs propres distinctes. D'après la condition suffisante rappelée dans la question **1-**, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

d) Les valeurs propres de A calculées dans la question précédente sont telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. D'après la question **4-**, **g)**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n = A_1$, où A_1 est définie dans **4-**, **d)**.
Caluculons A_1 : un vecteur propre de A associé à λ_1 est donné par une solution de l'équation $-\sqrt{2}a + 2b = 0$, soit par exemple $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_1 est obtenu en prenant une solution de l'équation $-\sqrt{2}a + b = 0$, soit un veteur de la forme $c \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, où c est une constante. D'autre part, pour obtenir l'égalité ${}^ty_1 x_1 = 1$, il faut que $c = \frac{1}{4}$, ce qui nous amène à prendre $y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
D'après la question **4-**, **d)**, on a

$$A_1 = x_1 {}^t y_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalement on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e) D'après la question **5-**, **a)**, pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc d'après la question **2-**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{(1+\sqrt{2})^n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{(1+\sqrt{2})^n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{2}.$$

Problème II.

On se propose d'étudier la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ qui au réel $x > 0$ associe

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt.$$

Pour $x > 0$, on définit la fonction $h_x : [0, 2x[\to \mathbb{R}$ par $h_x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$.

1- La fonction h_x est continue sur $[0, 2x[$ et au voisinage de $2x$, $h_x(t) = O\left(\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2x-t}}\right)$. Donc h_x est intégrable sur $[0, 2x[$ (car la fonction $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2x-t}}$ est aussi intégrable sur $[0, 2x[$).

2- Soit $0 < \varepsilon < x$ assez petit, en effectuant le changement de variable $t = 2x \sin v$, on obtient

$$\int_0^{2x-\varepsilon} \frac{\sin t}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt = \int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2x})} \sin(2x \sin v)\, dv.$$

On a donc,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2x})} \sin(2x \sin v)\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin v)\, dv.$$

3- **(i)** Considérons la fonction $\Psi : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $\Psi(v, x) \mapsto \sin(2x \sin v)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (resp. pour tout $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$), la fonction $v \mapsto \Psi(v, x)$ (resp. $x \mapsto \Psi(v, x)$) est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (resp. $\mathbb{R}_+$). De plus, Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sup_{v\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\Psi(v, x)| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème de la continuité sous le signe intégrale, la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin v)\, dv$ est continue. Comme la restriction de $\tilde{f}$ à $[0, 2x[$ est égale à f, $\tilde{f}$ répond à la question. Dans la suite on la notera f.

(ii) Nous utilisons le théorème de la dérivation sous le signe intégrale : Considérons la fonction $\Psi_0 : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_0(v, x) = \sin(2x \sin v) \ .$$

Les applications partielles $v \mapsto \Psi_0(v, x)$ et $x \mapsto \Psi_0(v, x)$ sont toutes les deux de classe C^1 respectivement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tous $(v, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$, $|\partial_x \Psi_0(v, x)| \leq 2$. De plus, la fonction constante égale a 2 est intégrable sur l'interval fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale f est de classe C^1 et que pour tous $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v) \cos(2x \sin v) \, dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v) \sin\left(2x \sin v + \frac{\pi}{2}\right) \, dv \,. \end{aligned}$$

(iii) Nous allons montrer par récurrence que f est de classe C^∞ et que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v)^n \sin\left(2x \sin v + n\frac{\pi}{2}\right) \, dv \,. \qquad (2)$$

On vient de montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons que f soit de classe C^n et vérifie (2) au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour la question précédente, pour montrer que la propriété est vraie pour $n + 1$, nous allons utiliser le théorème de la dérivation sous le signe intégrale. Considérons la fonction $\Psi_n : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_n(v, x) = (2 \sin v)^n \sin\left(2x \sin v + n\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Les applications partielles $v \mapsto \Psi_n(v, x)$ et $x \mapsto \Psi_n(v, x)$ sont toutes les deux de classe C^1 respectivement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tous $(v, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$, $|\partial_x \Psi_n(v, x)| \leq 2^{n+1}$. De plus, la fonction constante égale a 2^{n+1} est intégrable sur l'interval fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale $x \mapsto \Psi_n(v, x)$ est dérivable et

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v)^{n+1} \sin\left(2x \sin v + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \, dv.$$

Par récurrence, f est donc de classe C^∞ et $f^{(n)}$ est donnée par (2) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4- On admet que $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \dfrac{2^{4n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

a) La série de Taylor de f au voisinage de 0 est donnée par $s_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, où

$$a_{2n} = 0, \qquad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2}.$$

Il s'agit d'une série de terme général $(-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2} x^{2n+1}$:

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2} \, x^{2n+1} \,.$$

Le rapport de deux termes consécutifs est

$$\frac{a_{2n+3} \, x^{2n+3}}{a_{2n+1} \, x^{2n+1}} = -x^2 \frac{2^4(n+1)^2}{\left[(2n+2)(2n+3)\right]^2} = -\frac{4x^2}{(2n+3)^2} \qquad (3)$$

qui tend vers 0. Donc le rayon de convergence est $+\infty$.

b) Par (3), le signe du terme général est alterné. De plus, $\left|\dfrac{a_{2n+3}\, x^{2n+3}}{a_{2n+1}\, x^{2n+1}}\right| = \dfrac{4x^2}{(2n+3)^2}$ est inférieur à 1 pour $2n+3 > 2x$, soit $n > x - \frac{3}{2}$. Ce qui montre que la suite $\left|a_{2k+1}x^{2k+1}\right|$ est décroissante dès que $k > x - \dfrac{3}{2}$

5- Comme suggéré dans l'énoncé, on utilise la relation de Chasles,

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt\,,$$

en effectuant le changement de variable $t - \pi = u$ sur la seconde intégrale du membre de droite, on obtient,

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - (t+\pi)^2}} \right) dt < 0\,,$$

puisque l'on intègre une fonction continue négative non identiquement nulle. Par addition,

$$f(p\pi) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt < 0.$$

6- On procéde de la même façon que la question précédente, on a

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - (t-\pi)^2}} \right) dt > 0\,.$$

Comme la fonction sin est positive sur $[0, \pi]$, $f(\frac{\pi}{2}) \geq 0$. Donc

$$f(p\pi + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\, dt > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc au moins une fois dans chaque intervalle $[p\pi, p\pi + \frac{\pi}{2}]$ et par suite une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

AVRIL 2014

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \text{ et } 0 < u_0 < 1$$

1. Etudier la convergence de cette suite (u_n) et donner sa limite (si elle est convergente).
On vérifie par récurrence que $u_n > 0$, et que $u_n < 1$;

De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n) < 0$. La suite est alors décroissante et minorée, donc elle converge. (On pouvait aussi calculer le rapport $u_{n+1} / u_n < 1$).

Sa limite l est donc solution de l'équation : $l = \frac{l}{2} + \frac{(l)^2}{4}$ qui admet 0 et 2 comme solution, mais comme la suite est strictement inférieure à 1, sa limite est zéro.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{(v_n)^2}{4} \text{ et } 1 < v_0 \leq 2$$

Etudier la convergence de cette suite (v_n) et donner sa limite (si elle est convergente).
On montre par récurrence que cette suite est majorée par 2.

On a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(v_n - 1)(v_n - 3) < 0$, car (v_n) est entre 1 et 2.
La suite étant strictement décroissante et minorée, elle converge vers une limite l, solution de l'équation : $l = \frac{3}{4} + \frac{(l)^2}{4}$, soit l=1 ou 3, mais comme la suite est bornée entre 1 et 2, sa limite est égale à 1.

On peut aussi poser $u_n = (v_n - 1)$ et on se retrouve dans la situation de la première question.

Exercice n° 2

Soit l'application linéaire *f* définie sur R^4 et à valeurs dans R^3 par :

$$f(x,y,z,t)=(x+y,z+t,x+y+z+t)$$

1. Déterminer une base du noyau de *f*.
Il suffit de résoudre le système : $(x+y,z+t,x+y+z+t)=(0,0,0)$, soit *x*=-*y* et *z*=-*t*.
Les vecteurs $(1,-1,0,0)$ et $(0,0,1,-1)$ constituent une base du noyau.

2. Déterminer une base de l'image de *f*, notée *Im(f)*.
Comme $Dim\, R^4=4=Dim\, Ker(f)+Dim\, \mathrm{Im}(f)$. La dimension de l'image est égale à 2 et donc engendrée par deux vecteurs indépendants. Par exemple $f(1,0,0,0)=(1,0,1)$ et $f(0,0,1,0)=(0,1,1)$. On peut aussi écrire :
$(x+y,z+t,x+y+z+t)=(x+y)(1,0,1)+(z+t)(0,1,1)$

3. En identifiant R^3 à $R^4\times\{0\}$, quel est l'orthogonal de l'image de *f* dans R^4 ?
Il faut trouver deux vecteurs orthogonaux à $(1,0,1,0)$ et $(0,1,1,0)$ et indépendants entre eux. Par exemple (en utilisant le produit scalaire) : $(1,1,-1,0)$ et $(1,1,-1,1)$. L'orthogonal de *f* est engendré par ces deux vecteurs.

4. Ecrire la matrice *A* de la projection orthogonale sur *Im(f)* dans une base formée dans la réunion d'une base de *Im(f)* et de son orthogonal.
La matrice s'écrit :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Remarquons que cette matrice est diagonale.

5. Ecrire la matrice *M* de la projection orthogonale sur *Im(f)* dans la base canonique de R^4.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \text{ et sa matrice inverse } P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\-1&2&1&0\\1&1&-1&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Et enfin $M=P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\-1&2&1&1\\1&1&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Exercice n° 3

Soit f l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par R) par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2)-1}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est impaire et continue.

On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

2. Montrer que f' garde un signe constant sur R. On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t-1)\exp(t)+1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.

Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. Pour $x \neq 0$,

$f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \dfrac{u(x^2)}{x^2}$.

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur R^{+*}.
La fonction f est strictement croissante et continue sur R, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

3. Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + ... + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2!} + ... + \dfrac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On prolonge ε en 0 par $\varepsilon(0) = 0$

4. Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5, donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

Pour f^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5) \text{ et}$$

$$f^{-1} o\, f(x) = x \;\Rightarrow\; a_1\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right) + a_3\left(x^3 + 3\frac{x^5}{2}\right) + a_5 x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \dfrac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \dfrac{a_1}{6} + \dfrac{2}{3} a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\dfrac{1}{2} \\ a_5 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{12}x^5 + o(x^5)$

Exercice n° 4

Pour tout nombre réel *x*, on désigne par $E(x)$ sa partie entière, soit le plus grand entier inférieur ou égal à *x*.

1. Etudier la continuité de la fonction *f* définie sur R^{+*} (ensemble des nombres réels strictement positifs) par : $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$

Si $n < x < n+1$, alors $f(x) = \dfrac{n}{x}$ et *f* est continue.

Si $x = n$, alors $f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} \dfrac{n-1}{x} = \dfrac{n-1}{n} \neq 1$, et *f* n'est pas continue.

En conclusion *f* est continue sur $R^{+*} - N$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, étudier la convergence de cette suite et donner sa limite (si elle existe).

On a : $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$ et $\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$. Puis en divisant par la racine, on obtient : $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq 1$, puis quand n tend vers l'infini, $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \to 1$

Exercice n° 5

1. Etudier les variations de tracer le graphe de la fonction numérique *sh* d'une variable réelle définie par : $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Cette fonction est impaire, strictement croissante et convexe sur l'ensemble des réels positifs. Elle admet une branche parabolique dans la direction Oy. Sa dérivée est égale à : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(0) = 0$.

2. Soit $f(x) = Ln(1 + sh(x))$, où Ln désigne le logarithme népérien. Donner un développement limité de *f* d'ordre 3 au voisinage de zéro.

On a : $1 + sh(x) = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $Ln\,(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$

En remplaçant, on obtient : $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

3. Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

Comme la fonction est impaire, cette intégrale est nulle.

4. Soit $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, donner un développement limité de *g* d'ordre 2 au voisinage de zéro.

On a : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et en faisant la division euclidienne, on obtient : $g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$

5. Etudier le prolongement par continuité de *g* à l'origine. Cette fonction est-elle dérivable à l'origine ?

D'après ce qui précède, $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$, donc *g* est prolongeable en zéro en posant *g*(0)=1.

Cherchons la limite en zéro de $\frac{g(x) - g(0)}{x} \approx \frac{-x/2}{x} = -1/2$, *g* est donc dérivable en zéro et sa dérivée est égale à -1/2

Exercice n° 6

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

On a : $0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ et la suite converge vers zéro.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

3. Calculer $\underset{n \to +\infty}{Lim} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

On a : $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, x^k = 1 - x + x^2 + ...(-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$

Puis en intégrant entre 0 et 1 :

$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, x^k dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}\right) dx = Ln\, 2 + (-1)^{n+1} I_n$ et

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, x^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = Ln\, 2 + (-1)^{n+1} I_n \to Ln\, 2$

4. Soit $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Déterminer la limite de J_n quand n tend vers l'infini.

Le raisonnement est analogue à celui de la première question. On a : $0 < J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ et la suite converge vers zéro.

5. Calculer J_n en fonction de n.

La démarche est analogue à celle de la deuxième question.

$$J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^n}{1 + x^2} dx = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \quad , \quad \text{puis} \quad J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [Arctg\ x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et}$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[Ln\sqrt{x}\right]_0^1 = Ln\sqrt{2}$$

Par récurrence, on obtient,

Pour n pair : $J_{2n} = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n-3} + ... + (-1)^n \dfrac{\pi}{4}$ et

Pour n impair : $J_{2n+1} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n-2} + ... + (-1)^n Ln\sqrt{2}$