SCIENCE EN HERBE MATHS TERMINALE S2 & S4 & S5

SERIE N°2-1 : SUITES NUMERIQUES

Exercice 1 :

Etudier le sens de variation de la suite U dans chacun des cas suivants :

1) $U_n = \frac{2n-1}{3n-2}$; $n \geq 1$ 2) $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$; $n \geq 1$ 3) $U_n = \frac{5}{(-2)^n}$; $n \geq 0$

4) $U_n = \frac{2^{2n}}{3^{n+2}}$; $n \geq 0$ 5) $U_n = n^3 - n$; $n \geq 0$ 6) $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $n \geq 0$

7) $U_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$; $n \geq 0$ 8) $U_n = \frac{4}{2n^2-2n+1}$; $n \geq 0$.

Exercice 2 :

1) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{n^3-n}{3}$
   a) Calculer les 5 premiers termes de (U_n).
   b) Etudier le sens de variation de (U_n).
2) Soit la suite (U_n) definie par par $U_n = \frac{n-1}{n+1}$.
   a) Etudier le sens de variation de (U_n).
   b) Calculer la limite de cette suite par (U_n).
3) (V_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_n = \frac{1}{2}U_{n-1} - 4 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Démonter par récurrence que :

   a) La suite(U_n) est minorée par -6.
   b) La suite (U_n) est décroissante.
4) La suite (U_n) est définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

   Déterminer par récurrence que la suite $(U_n)_n$ est minorée par $\frac{3}{2}$ et majorée par 2.

Exercice 3 :

Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 35} \end{cases}$

1) Montrer que (U_n) est majorée par 7.
2) (U_n) est-elle bornée.
3) Montrer que (U_n) est croissante.
4) Que peut-on conclure.

Proposée Par Mr DIA

Exercice 4 :

1) Soit (U_n) la suite definie par $U_n = \frac{n^2+3}{2n^2+1}$

   a) Montrer que $U_n = \frac{1}{n} * \frac{1+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{1}{n^3}}$

   b) En déduire que (U_n) converge vers 0.

2) Soit (U_n) la suite définie par :

   $U_n = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}$

   a) Montrer que pour tout entier $n > 0$

   $U_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}$

   b) En déduire la limite de (U_n).

Exercice 5 :

1) Démontrer par récurrence les relations suivantes.

   a) $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)}{4}$

   d) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$

   e) $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est dérivable par 7.

2) a) Soit (U_n) la suite définie par :

   $U_0 = 2 \; et \; U_n = 2U_n - 3$. Montrer que $U_n = 3 - 2^n$

   c) Soit (V_n) la suite définie par :

   $V_0 = 1 \; et \; V_n = \frac{1}{2}V_n - 1$. Montrer que $V_n \geq -2$.

Exercice 6 :

On considère la suite réelle U definie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$

1) Montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq U_n \leq 2$.
3) Monter que U est croissante sur $\mathbb{N}$
4) Soit pour tout n de $\mathbb{N}$ $V_n = U_n - a$

   a) Déterminer a pour que (V_n) soit géométrique.

   b) Exprimer alors U_n en fonction de n.

   c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 7 :

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1-U_n} \end{cases}$ et (V_n) celle definie par $V_n = \frac{1+U_n}{U_n}$

1) Calculer les 3 premiers termes de (U_n) et (V_n).

2) Déterminer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exercice 8 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $U: \begin{cases} U_0 = U_1 = 0 \\ U_{n+2} = U_n + 1 \end{cases}$

1) U est-elle une suite arithmétique.
2) $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite arithmétique.
   $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite arithmétique.
3) Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{100}$.
4) Montrer que pour tout entier n: $on\ a :\ U_{n+1} = -U_n + n$
5) On pose pour tout entier naturel n: $V_n = U_n - an + b\ ou\ a\ et\ b$ 2 reels. Determiner les reels a et b pour que (V_n) soit une suite geometrique dont on precisera la raison
6) Exprimer alors V_n puis U_n en fonction de n.

Exercice 9 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $U: \begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+5}{U_n-1} \end{cases}$ (on suppose que pour tout entier n, non nul $U_n \neq 1$)

1) Calculer U_1, $U_2\ et\ U_3$ U est-elle une suite géométrique, arithmétique.
2) Montrer que pour tout entier n on a : $U_{n+2} = U_n$.
3) Montrer que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} + U_n = 9$.
4) On pose pour tout entier naturel n : $V_n = U_{n+1} - U_n$.
   Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
5) Exprimer alors V_n puis U_n en fonction de n.

Exercice 10 :

On se donne 2 réels a et b tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites (U_n) et (V_n) par les relations $U_0 = a$ et $V_0 = b$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+V_n}{2}$

1) Etablir une relation entre $U_{n+1} - V_{n+1}$ et $U_n - V_n$.
2) En déduire l'expression de $U_n - V_n$ en fonction de n, a et b.
3) En déduire l'expression de U_{n+1} en fonction de U_n, n, a et b.
4) Montrer que les suites $U\ et\ V$ convergent vers une limite commune que l'on déterminera.