UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

13 G 18 Bis A01
Durée : 4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. Puisque $m = x + ix, m - i = x + i(x-1) = i(x - 1 - ix) = i\,\overline{m-1}$.

Donc $|m-i| = |i|\ |m-1| = |m-1| = \sqrt{x^2+(x-1)^2}$
$(m-i)\ (m-1) = i\ \overline{m-1}(m-1) = i\ |m-1|\ ^2$ est bien imaginaire pur.
$m(1+i) = x(1+i)^2 = 2ix$ est bien imaginaire pur.

2. a. Le rapport de s est $k = \dfrac{JM}{JO} = \dfrac{|m-i|}{1} = |m-i|$.

Puisque I et M ont pour images respectives I' et M' par s, on a : $k = \dfrac{I'M'}{IM} = \dfrac{I'M'}{|m-1|}$;

donc $I'M' = |m-1||m-i|$.

b. Le rapport de $s \circ s$ est $k^2 = |m-i|^2$.

J et O ont pour images respectives J et $s \circ s(O) = s(M) = M'$ par $s \circ s$.

On a donc : $\dfrac{JM'}{JO}$ = rapport de $s \circ s = |m-i|^2$; donc $JM' = JO|m-i|^2 = |m-i|^2$.

c. D'après la première question on a :

$I'M' = |m-1||m-i| = |m-i|^2 = JM'$.

3. a. Le centre de s étant le point $J(i)$, l'écriture complexe de S est $z' = a(z-i)+i$, a nombre complexe à déterminer. O a pour image $M(m)$ se traduit par : $m = a(-i)+i$; donc $a = (i-m)/i = 1 + im$; donc $z' = (1+im)(z-i)+i$ et

l'écriture complexe de S est : $z' = (1+im)z + m$.
I' a pour affixe $(1+im) \times 1 + m = m(1+i)+1$.
M' a pour affixe $(1+im)m + m = m(2+im)$.

Par conséquent :

Le vecteur $\overrightarrow{II'}$ a pour affixe $z_{I'} - z_I = m(1+i)+1-1$

Le vecteur $\overrightarrow{II'}$ a donc pour affixe $= m(1+i)$

Le vecteur $\overrightarrow{M'I'}$ a pour affixe $z_{I'} - z_{M'} = m(1+i)+1-m(2+im) = -im^2+(-1+i)m+1 = i\big(m^2-(1+i)m-1\big) = -i(m-i)(m-1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{M'I'}$ a donc pour affixe $-i(m-i)(m-1)$.

4. Puisque $m(1+i)$ est imaginaire pur, le vecteur $\overrightarrow{II'}$ est un directeur de la droite (IK) ;

le point I' appartient donc à la droite (IK).

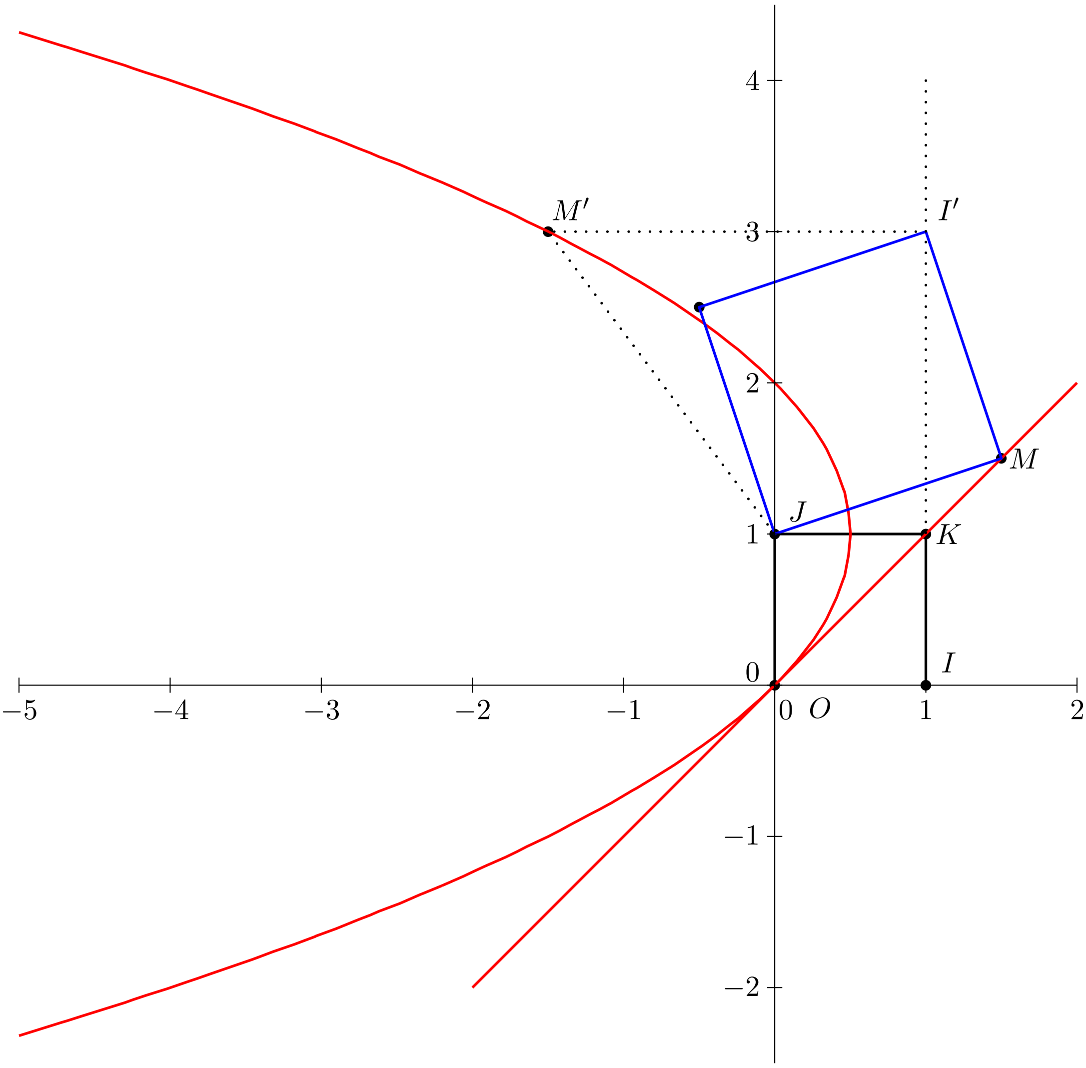
Puisque $(m-i)(m-1)$ est imaginaire pur, $i(m-i)(m-1)$ est réel pur,

le vecteur $\overrightarrow{M'I'}$ est donc orthogonal de la droite (IK).

On en déduit que le point I' est bien le projeté orthogonal de M' sur (IK).

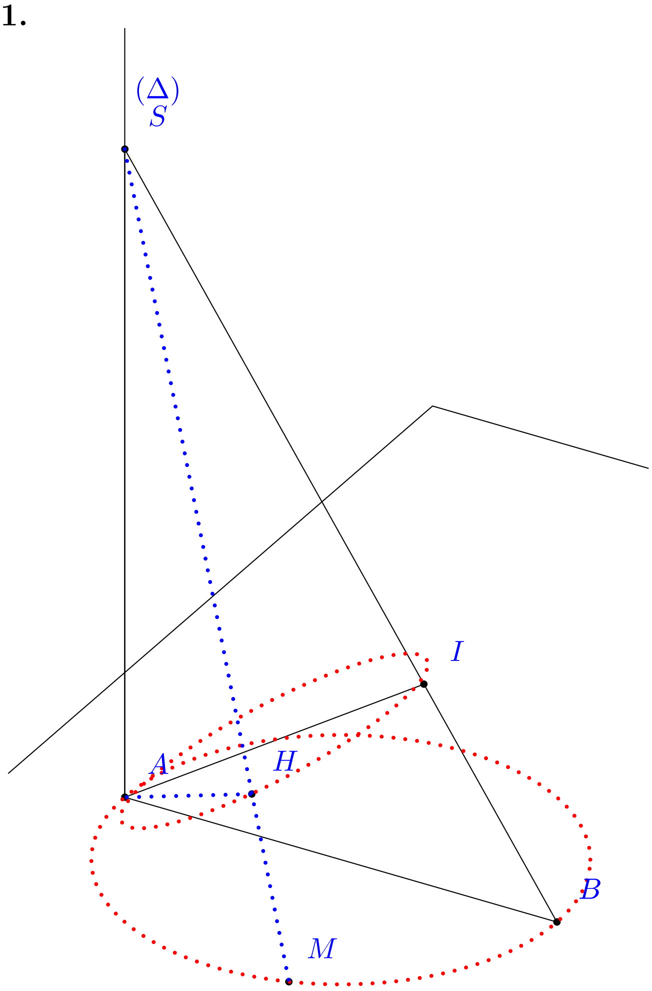
a. La relation (2) devient $M'J = d\big(M', (IK)\big)$.

Donc M' appartient à la parabole de foyer J et de directrice la droite (IK).



Correction de l'exercice 2.

1.



2. H appartient bien à la sphère de diamètre $[AS]$ car le triangle AHS est rectangle en H.

3. Puisque M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, (MB) est perpendiculaire à (AM).
De plus, $\Delta = (AS)$ étant perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à (BM).
La droite (BM) étant orthogonale à (AM) et (AS), est orthogonale au plan (AMS) défini par ces deux droites.
On en déduit que (BM) est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à (AH).
Comme par hypothèse (AH) est perpendiculaire à (MS), (AH) est orthogonale au plan (BMS) défini par les deux droites (BM) et (MS).

4. (AH) étant orthogonale au plan (BMS) est orthogonale à (BS) et par hypothèse (AI) est perpendiculaire à (BS) ; par conséquent (AHI) est le plan passant par I et perpendiculaire à la droite (BS) c'est à dire (Π) : H appartient bien à (Π).

5. a. A appartient à (Σ) par hypothèse. I appartient à (Σ) car le triangle AIS est rectangle en I. D'après la question 2, H appartient à (Σ).
Donc l'intersection de (Σ) et de (Π) est le cercle passant par les points A, I et H, lequel est le cercle de diamètre $[AI]$. En effet (AH) étant perpendiculaire au plan BMS, est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à (HI)
b. H appartenant à (Σ) et à (Π) appartient à leur intersection Γ.

PROBLEME.

Partie A

1. a. Les candidats ont le choix entre deux méthodes :

Par dérivation .

L'application

$$L : x \mapsto \int_0^x u\mathrm{e}^{-mu}\,du$$

a pour dérivée $x \mapsto x\mathrm{e}^{-mx}$.

L'application

$$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-mx} + 1/m^2$$

a pour dérivée

$$x \mapsto (-\alpha m x + \alpha - \beta m)\mathrm{e}^{-mx}.$$

Il suffit donc d'avoir :

$$\begin{cases} -\alpha m & = & 1 \\ \alpha - \beta m & = & 0 \end{cases} \quad \text{i.e}$$

$\alpha = -1/m$ et $\beta = -1/m^2$

L'application $M \ : x \mapsto \displaystyle\int_0^x u^2\mathrm{e}^{-mu}\,du$ a pour dérivée

$$x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-mx}.$$

L'application

$$x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-mx} + 2/m^2$$

a pour dérivée

$$x \mapsto \big(-amx^2 + (2a - bm)x + b - cm\big)\mathrm{e}^{-mx}.$$

Il suffit donc d'avoir :

$$\begin{cases} -am & = & 1 \\ 2a - bm & = & 0 \\ b - cm & = & 0 \end{cases} \quad \text{i.e}$$

$a = -1/m,\ b = -2/m^2$ et $c = -2/m^3$

Par intégration (par parties).

En posant $U = u$ et $V' = \mathrm{e}^{-mu}$ on trouve :

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x u\mathrm{e}^{-mu}\,du \\ &= \Big[-\frac{1}{m}u\mathrm{e}^{-mu}\Big]_0^x + \frac{1}{m}\int_0^x \mathrm{e}^{-mu}\,du \\ &= -\frac{1}{m}x\mathrm{e}^{-mx} - \frac{1}{m^2}\Big[\mathrm{e}^{-mu}\Big]_0^x \\ &= \Big(-\frac{1}{m}x - \frac{1}{m^2}\Big)\mathrm{e}^{-mx} + \frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on pose $U = u^2$ et $V' = \mathrm{e}^{-mu}$ on trouve :

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^x u^2\mathrm{e}^{-mu}\,du \\ &= \Big[-\frac{1}{m}u^2\mathrm{e}^{-mu}\Big]_0^x + \frac{2}{m}\int_0^x u\mathrm{e}^{-mu}\,du \\ &= -\frac{1}{m}x^2\mathrm{e}^{-mx} + \frac{2}{m}L(x) \\ &= \Big(-\frac{1}{m}x^2 - \frac{2}{m^2}x - \frac{2}{m^3}\Big)\mathrm{e}^{-mx} + \frac{2}{m^3} \end{aligned}$$

b. Puisque « l'exponentielle l'emporte sur les polynômes » et que $m > 0$:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\int_0^x u\mathrm{e}^{-mu}\,du = \lim_{x\mapsto+\infty}(\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-mu} + 1/m^2 = 1/m^2$$

$$\text{et} \lim_{x\mapsto+\infty}\int_0^x u^2\mathrm{e}^{-mu}\,du = \lim_{x\mapsto+\infty}(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-mu} + 2/m^3 = 2/m^3 .$$

c. Puisque l'intégrale d'une fonction φ positive et continue sur un intervalle $[a, b], a < b$ est positive, dérivable et de dérivé φ, f et g sont positives, dérivables croissantes sur I.

Comme $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ 0 < \mathrm{e}^{-u} \leq \mathrm{e}^{u}$, on a, en ajoutant e^u puis en passant à l'inverse :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{\mathrm{e}^u} > \frac{1}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}} \geq \frac{1}{2\mathrm{e}^u}.$$

- On en déduit en multipliant par u et en intégrant de 0 à $x > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_0^x u\mathrm{e}^{-u}du \leq f(x) \leq \int_0^x u\mathrm{e}^{-u}du.$$

Le dernier membre est une fonction croissante de x et d'après le b. (avec $m = 1$) il a pour limite 1 ; par conséquent, f est majorée, et comme elle est croissante, elle a une limite ℓ.

On obtient alors par passage à la limite $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

- On en déduit aussi en multipliant par u^2 et en intégrant de 0 à $x > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_0^x u^2 \mathrm{e}^{-u} du \leq g(x) \leq \int_0^x u^2 \mathrm{e}^{-u} du.$$

Le dernier membre est une fonction croissante de x et d'après le b. (avec $m = 1$) il a pour limite 2 ; par conséquent, g est majorée, et comme elle est croissante, elle a une limite s.

On obtient alors par passage à la limite $1 \leq s \leq 2$.

d. Le changement de variable $t = -u$ conduit à

$$f(x) = -\int_0^{-x} \frac{-t}{\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}} dt = \int_0^{-x} \frac{t}{\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}} dt = f(-x).$$

La fonction f est donc paire.

2. La fonction h est dérivable sur I et sa dérivée $x \mapsto h'(x) = -x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ est strictement négative sur $]0, +\infty[$.

Comme $h(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = -\infty$, h est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 2]$ qui contient 0. L'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0.

On a $h(1) = 2/\mathrm{e} > 0$ et $h(1,3) \sim -0.47 < 0$ (avec une machine à calculer), x_0 appartient bien à $]1;\ 1,3[$.

3. a. La fonction $\varphi\ : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$. Voici donc le T.V de φ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Ce tableau montre que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geq 1 > 0$, ce qui entraîne $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

On déduit de l'inégalité précédente que

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > \mathrm{e}^x > x$, puis $1 > \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = f'(x)$

b. La fonction f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x non nul, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis dans l'intervalle d'extrémités 0 et x : il existe un réel c dans l'intervalle ouvert d'extrémités 0 et x tel que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) < 1$.

On en déduit que,

si $x > 0$ alors $f(x) < x$.
Et si $x < 0$ alors $f(x) > x$ (Relation évidente puisque f est positive).

Ces relations montrent que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la première bissectrice dans $]0, +\infty[$ et au dessus de la première bissectrice dans $]-\infty, 0[$.

Comme $f(0) = 0$ et que les inégalités précédentes sont strictes, le réel 0 est bien la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque : La relation $x > 0 \Rightarrow f(x) < x = |x|$ montre puisque f est paire que

$$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Rightarrow f(-x) < -x \Leftrightarrow f(x) < -x = |x|.$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 0 < f(x) < |x|$

Partie B

Fixons x dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, appelons $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$f(x) - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2p+1)u}\,du = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+2)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du$$

$$f(x) - \int_0^x u\mathrm{e}^{-u}\,du = \int_0^x \frac{u}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du - \int_0^x u\mathrm{e}^{-u}\,du = \int_0^x \frac{-u\mathrm{e}^{-2u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du$$

$\mathcal{P}_0$ est donc vraie.
Supposons la proposition vraie jusqu'à un entier n donné.
Alors

$$f(x) - \sum_{p=0}^{n+1}(-1)^p \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2p+1)u}\,du$$

$$= f(x) - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2p+1)u}\,du - (-1)^{n+1}\int_0^x u\mathrm{e}^{-(2n+3)u}\,du$$

(Isolation du dernier terme de la somme)

$$= (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+2)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du - (-1)^{n+1}\int_0^x u\mathrm{e}^{-(2n+3)u}\,du \text{ (car } \mathcal{P}_n \text{ est vraie)}$$

$$= -(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+4)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du$$

(Regroupement des intégrales et réduction au même dénominateur)

$$= (-1)^{n+2}\int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+4)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
On en déduit que pour tout réel x positif :

$$\left|f(x) - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2p+1)u}\,du\right|$$

$$\leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^{n+1}u\mathrm{e}^{-(2n+2)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\right|du$$

$$= \int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+2)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}du$$

$$\leq \int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+2)u}}{\mathrm{e}^u}du \text{ car le dénominateur est supérieur à } \mathrm{e}^u$$

$$= \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2n+3)u}du$$

Ainsi $\left|f(x) - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2p+1)u}\,du\right| \leq \int_0^x u\mathrm{e}^{-(2n+3)u}du.$

En tenant compte de la première partie (avec $m = 2p+1$ et $2n+3$ respectivement), on peut alors passer à la limite quand x tend vers $+\infty$ et écrire[1] :

$$\left|\ell - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \frac{1}{(2p+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

Pour trouver une valeur approchée de ℓ à 10^{-1} près, il suffit de choisir n tel que

1. Cette relation est immédiatement obtenue comme conséquence de la règle de Leibniz sur les séries alternées qui permet de majorer le reste de la série par la valeur absolue du premier terme négligé.

$$\frac{1}{(2n+3)^2} \leq 10^{-1} \text{ i.e } n \geq \frac{\sqrt{10}-3}{2}.$$

On peut donc choisir $n = 1$ et prendre comme valeur approchée de ℓ le réel

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p \frac{1}{(2p+1)^2} = 1 - 1/9 = 8/9.$$

1. On intègre par parties en posant $U = f(\lambda) - f(x)$ et $V' = 1$.
Alors $U = -f'(x) = -\dfrac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ et on peut prendre $V = x$. Il vient

$$\int_0^\lambda \big(f(\lambda) - f(x)\big)dx = \Big[x\big(f(\lambda) - f(x)\big)\Big]_{x=0}^{x=\lambda} + \int_0^\lambda \frac{x^2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}dx = g(\lambda)$$

$g(\lambda)$ peut donc être vu comme une mesure en unités d'aire de l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 0,\ x = \lambda;\ y = f(\lambda)$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

s, limite de $g(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$ peut donc être vu comme une mesure en unités d'aire de l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 0,\ y = \ell$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

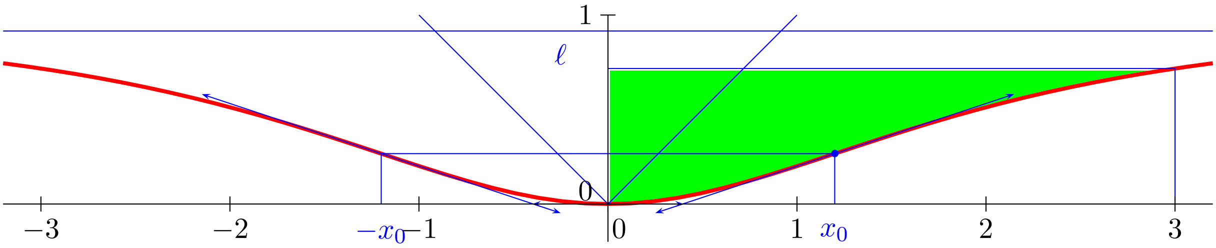
2. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ a le même signe que x.

Comme la fonction f est paire, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$.

Voici donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	ℓ	$\searrow$	0	$\nearrow$	ℓ

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{h(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.
D'après l'étude faite sur h, les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses x_0 et $-x_0$ sont des points d'inflexion.
Voici la courbe $\mathcal{C}_f$.



3. a. a_0 est positif et pour tout entier naturel $n, a_{n+1} = f(a_n)$ est positif car f est positive. Comme pour tout réel positif $x, f(x) \leq x$, on a $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$.

La suite (a_n) est donc décroissante

La suite (a_n) décroissante et minorée par 0, est convergente vers un réel $a \geq 0$. La relation $a_{n+1} = f(a_n)$ et la continuité de f permettent d'obtenir par passage à la limite $f(a) = a$ i.e $a = 0$ d'après la question 2 b) :

La suite (a_n) est donc convergente vers 0.

Partie C

1. Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln x = 0$ on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(\ln x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = \ell$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = \ell$.

On a, puisque $\lim\limits_{t \mapsto 0^+} \ln t = -\infty$:

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} F(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(\ln x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} f(t) = \ell = F(0)$.

F est bien continue au point 0.

2. a. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*, F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = f'(\ln x)\ \ln'(x) = \dfrac{\ln x}{x + 1/x}\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$.

b. Soit x un réel strictement positif. Puisque F continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$, le théorème des accroissements finis permet d'affirmer l'existence d'un réel c dans $]0, x[$ tel que $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c) = \dfrac{\ln c}{1 + c^2}$.

Puisque $c \in]0, 1[$, on a $1 + c^2 \leq 2$ et en prenant l'inverse puis en multipliant par le réel *négatif* $\ln c$ on obtient $\dfrac{\ln c}{1 + c^2} \leq \dfrac{1}{2} \ln c$.

On en déduit par transitivité $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq \dfrac{1}{2} \ln c$; puis comme la fonction ln est croissante : $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq \dfrac{1}{2} \ln x$.

Quand x tend vers 0^+, ce dernier membre ayant pour limite $-\infty$ on a :

$$\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -\infty.$$

La fonction F n'est donc pas dérivable au point 0.

Remarque : Le théorème suivant qui n'est malheureusement pas au programme bien que souvent utilisé dans les classes terminales :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$. Alors
- Si f' a une limite $\alpha \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a^+ alors f est dérivable au point a et $f'(a) = \alpha$.
- Si f' a une limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a^+ alors f n'est dérivable au point a.

aurait permis d'établir la non dérivabilité de F ; en effet F est continue en 0 et

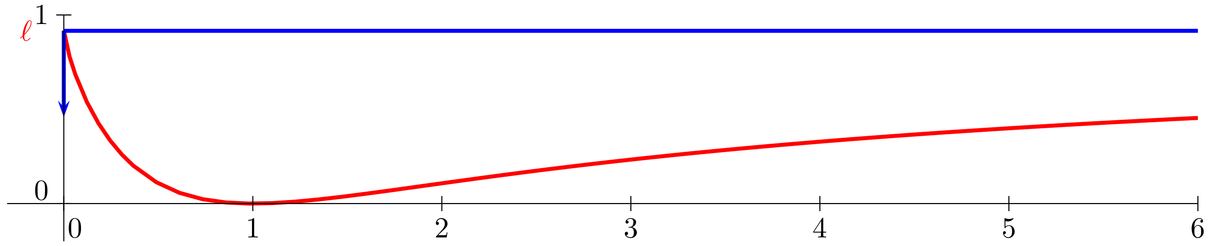
$$\lim_{x\mapsto 0^+} F'(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty.$$

c. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) - F(1) = \int_1^x F'(u)\, du = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2}\, du$$

Mais $F(1) = f(\ln 1) = f(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2}\, du$ [2]

Voici le graphe de F (Pas demandé)



---

2. $\ell = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u + e^{-u}}\, du = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = \int_1^0 \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sim 0.915965594177$ est la *constante de Catalan*