UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 7

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

12 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Les solutions proposées par la commission d'examen ne sont que des indications.
Un candidat peut très bien en donner d'autres et même de meilleures.
Le correcteur se fera donc un devoir d'explorer toutes les pistes proposées par les candidats.

Correction de l'exercice 1.

1. A étant le symétrique de F par rapport à (D), on a $d(A, F) = 2d(A, D)$, le point A est donc sur $(\mathcal{H})$; et comme la droite (AF) est perpendiculaire à (D), A est un sommet de $(\mathcal{H})$.

Soit H le milieu du segment $[FA]$. Les points F, A', H et A appartiennent à une même perpendiculaire à (D).

Un point M est un sommet de $(\mathcal{H})$ ssi il appartient à l'axe focal i.e à la droite (FH) et $FM = 2HM$.

Cette dernière relation signifie que $\overrightarrow{FM}^2 = 2^2\overrightarrow{HM}^2$ ou $(\overrightarrow{FM} - 2\overrightarrow{HM})(\overrightarrow{FM} + 2\overrightarrow{HM}) = 0$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{FM} - 2\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{FM} + 2\overrightarrow{HM}$ sont donc orthogonaux et puisqu'ils sont colinéaires, un de ces deux vecteurs est nul (et l'autre non nul).

Comme $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{HA}$, on doit avoir $\overrightarrow{FA'} = -2\overrightarrow{HA'}$; donc

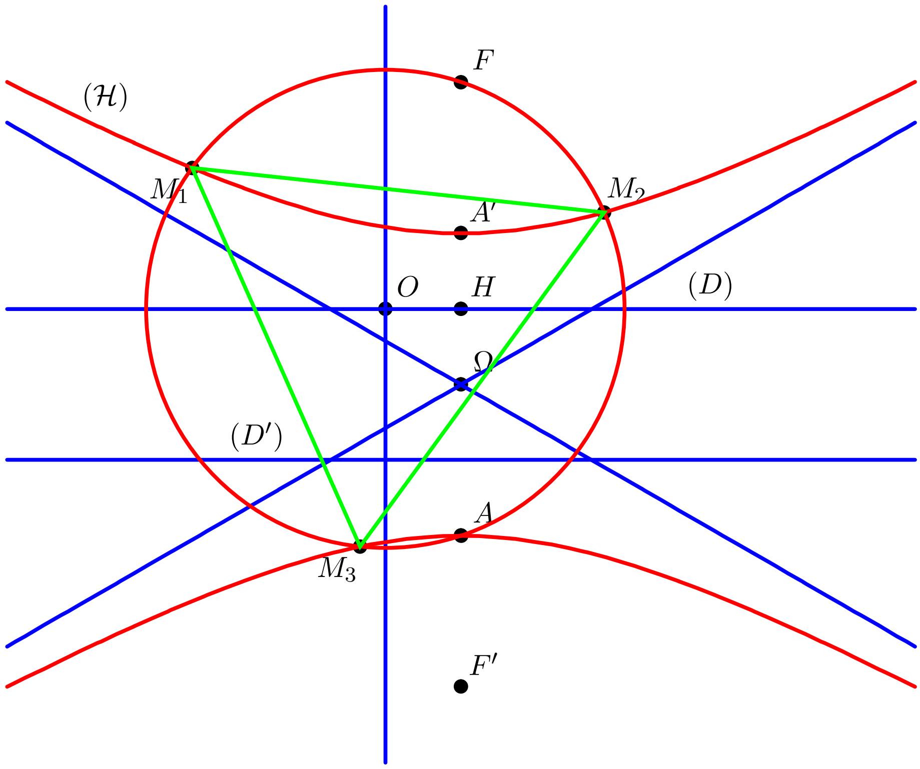
$$\begin{aligned} \overrightarrow{FA'} &= 2\overrightarrow{A'F} + 2\overrightarrow{FH} \\ &= 2\overrightarrow{A'F} + \overrightarrow{FA} \quad \text{car } H \text{ est le milieu de } [FA] \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{FA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA'} = -\overrightarrow{FA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FA}$$

Le point Ω est le milieu du segment $[AA']$.



La construction des asymptotes n'est pas demandée.[1]

2. a. Un point M du plan d'affixe $z = x + iy$ appartient à $(\mathcal{C})$ ssi $OM = OF$ i.e $|z| = |a|$ ou $z\bar{z} = a\bar{a}$

Un point M du plan d'affixe $z = x + iy$ appartient à $(\mathcal{H})$ ssi $AF = 2\ d(M, D)$ i.e $|z - a| = 2|y|$ ou $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4\left[\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})\right]^2$.

Finalement M appartient à $(\mathcal{H})$ ssi $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) + (z-\bar{z})^2 = 0$.

b. Un point M du plan d'affixe z appartient à $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{H})$ ssi $\begin{cases} z\bar{z} - a\bar{a} & = & 0 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) + (z-\bar{z})^2 & = & 0 \end{cases}$

Dans la première relation, tirons $\bar{z}$ en fonction de z, mettons cette valeur dans la deuxième relation, multiplions par z^2 et développons ; alors M appartient à $(\mathcal{C})\cap(\mathcal{H})$ ssi $\begin{cases} z\bar{z} - a\bar{a} & = & 0 \\ z^4 - \bar{a}z^3 - a^2\bar{a}z + a^2\bar{a}^2 & = & 0 \end{cases}$

Puisque le point A dont l'affixe est $\bar{a}$ appartient à $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{H})$, $\bar{a}$ est solution de chacune des deux équations. On peut donc mettre $z - \bar{a}$ en facteur dans le polynôme $z^4 - \bar{a}z^3 - a^2\bar{a}z + a^2\bar{a}^2$ comme le suggère la question posée.

En procédant par identification ou par division euclidienne, on trouve

$$z^4 - \bar{a}z^3 - a^2\bar{a}z + a^2\bar{a}^2 = (z-\bar{a})(z^3 - a^2\bar{a})$$

par conséquent

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{H}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z\bar{z} - a\bar{a} & = & 0 \\ (z-\bar{a})(z^3 - a^2\bar{a}) & = & 0 \end{cases}$$

On peut donc prendre $k = a^2\bar{a}$

c. Puisque $k = a^2\bar{a}$, $|k| = |a|^3 = r^3$, $\arg k = \arg(a^2) + \arg(\bar{a}) = 2\theta - \theta = \theta$ et $k = r^3\ \mathrm{e}^{i\theta}$

$\bar{a}$ est une solution de l'équation $z - \bar{a}$.

L'équation $z^3 - a^2\bar{a} = 0$ est équivalente à $z^3 = r^3\mathrm{e}^{i\theta}$ soit $z = r\mathrm{e}^{i(\theta+2\ell\pi)/3}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Cette équation a donc trois solutions : $z_1 = r\mathrm{e}^{i\theta/3}$, $z_2 = r\mathrm{e}^{i(\theta+2\pi)/3}$ et $z_3 = r\mathrm{e}^{i(\theta+4\pi)/3}$ et comme pour tout $p \in \{1, 2, 3\}$, $z_p\bar{z}_p = r^2 = a\bar{a}$, les trois complexes z_p sont bien solutions du système.

1. Leur réunion a pour équation $(x-a)^2 - \dfrac{1}{3}(3y-b)^2 = 0$ dans le repère de l'exercice avec $F(a, b)$

Pour montrer que les points M_p ayant pour affixes les z_p forment un triangle équilatéral il suffit de vérifier que $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ ou $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta/3} - \mathrm{e}^{i(\theta+2\pi)/3}}{\mathrm{e}^{i\theta/3} - \mathrm{e}^{i(\theta+4\pi)/3}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{2i\pi/3}}{1 - \mathrm{e}^{4i\pi/3}} = \frac{\mathrm{e}^{i\pi/3}}{\mathrm{e}^{2i\pi/3}} \frac{\mathrm{e}^{-i\pi/3} - \mathrm{e}^{i\pi/3}}{\mathrm{e}^{-2i\pi/3} - \mathrm{e}^{2i\pi/3}} = \mathrm{e}^{-i\pi/3} \frac{2i\sin(\pi/3)}{2i\sin(2\pi/3)} = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$$

Remarque 1.

1. Lorsque l'on prend comme origine O l'intersection de (FA) et de (D), alors $\arg F = \pi/2$ ou $-\pi/2$ et A est confondu avec l'un des M_p

2. Les trois complexes z_p vérifient $z_1 = z_1.1,\ z_2 = z_1 j$ et $z_2 = z_1 j^2$ avec $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.
N_1, N_2 et N_3 étant les points d'affixes respectives $1, j, j^2$, le triangle $M_1M_3M_3$ est l'image du triangle $N_1N_3N_3$ par la similitude de centre O de rapport $|z_1| = r$ et d'angle $\arg z_1 = \theta/3$.
Puisque le triangle $N_1N_3N_3$ est équilatéral, il en est de même du triangle $M_1M_3M_3$.

Correction de l'exercice 2.

1. a. $u_3 = 3780$.
b. 2^n et 14^n sont des nombres pairs, 3×7^n produit de nombres impairs, est impair ; donc u_n est un nombre pair.
c. $u_3 = 3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$; u_3 est donc divisible par $2, 3, 5$ et 7. Oui $2, 3, 5$ et 7 appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. a. Les valeurs possibles de m sont $1, 2, 7, 14$
b. $14 \times m^{p-2} = mn \times m^{p-2} = n \times m^{p-1}$.
p étant premier et *strictement supérieur* à 7, est premier avec m ; donc, d'après le petit théorème de Fermat $m^{p-1} \equiv 1\ [p]$. On obtient, en multipliant par n :

$$14 \times m^{p-2} = n \times m^{p-1} \equiv n\ [p]$$

En appliquant ce résultat à $m = 2,\ 7$ puis 14, on en déduit modulo p :
$14u_{p-2} = (14 \times 2^{p-2}) + 3 \times (14 \times 7^{p-2}) + (14 \times 14^{p-2}) - 14 \equiv 7 + 3 \times 2 + 1 - 14 = 0$
c. Puisque p divise $14u_{p-2}$ et qu'il est premier avec 14, il divise u_{p-2} d'après le théorème de Gauss ; donc $p \in \mathcal{E}$.
d. $2, 3, 5$ et 7 appartiennent à $\mathcal{E}$ et si p est un nombre premier strictement supérieur à 7, il appartient aussi à $\mathcal{E}$.
$\mathcal{E}$ est donc l'ensemble de tous les nombres premiers.

Correction du problème.

Partie A

1. Un réel x appartient à l'ensemble D_f de f ssi $1 + x > 0$ et $x \neq 0$; donc $D_f =]-1, 0[\cup]0,\ +\infty[$.
Un réel non nul x_0 de D_f est contenu dans un intervalle I_0 ne contenant pas 0.
Dans un tel intervalle, la fonction f est le produit des fonctions continues $x \mapsto \dfrac{1}{x},\ x \mapsto \ln(1+x)$; la fonction f est donc continue sur I_0 et en particulier au point x_0.
Pour étudier la continuité de f au point 0, on peut écrire :

$$\lim_{x \mapsto 0,\ x\neq 0} f(x) = \lim_{x \mapsto 0,\ x\neq 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 = f(0),$$

la fonction f est donc continue sur 0.

2. a. Pour tout élément x de $]0,+\infty[$ et tout $u \in [0,x]$ on a :

$$\begin{aligned}
& 0 \leq u^2 \leq x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{u^2}{1+u} \leq \frac{x^2}{1+u} \\
\Rightarrow\ & 0 \leq \int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du \leq \int_0^x \frac{x^2}{1+u}\,du = x^2\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du \qquad \text{On a divisé par le réel } x>0
\end{aligned}$$

Pour tout élément x de $]-1,0[$ et tout $u \in [x,0]$ on a :

$$\begin{aligned}
& 0 \leq u^2 \leq x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{u^2}{1+u} \leq \frac{x^2}{1+u} \\
\Rightarrow\ & 0 \leq \int_x^0 \frac{u^2}{1+u}\,du \leq \int_x^0 \frac{x^2}{1+u}\,du = x^2\int_x^0 \frac{1}{1+u}\,du \\
\Leftrightarrow\ & 0 \geq \frac{1}{x}\int_x^0 \frac{u^2}{1+u}\,du \geq x\int_x^0 \frac{1}{1+u}\,du \qquad \text{On a divisé par le réel } x<0 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \geq -\frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du \geq -x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du
\end{aligned}$$

b. On a par réduction au même dénominateur :

$$\forall u \in]-1,+\infty[,\ 1-u+\frac{u^2}{1+u} = \frac{1-u^2+u^2}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

On en déduit pour tout x dans $]-1,+\infty[$ et par intégration :

$$\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du = x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du$$

i.e

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du$$

enfin en divisant par x s'il est non nul :

$$f(x) = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du.$$

c. On déduit des questions précédentes que le taux d'accroissement τ de f en 0 s'écrit :

$$\forall x \in D_f,\ x \neq 0 \Rightarrow \tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du$$

La deuxième relation de la question 2.a. s'écrit aussi

$$\forall x \in D_f,\ x \neq 0 \Rightarrow\ 0 \leq \left|\frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du\right| \leq \left|x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du\right|$$

et on en déduit en divisant par $|x|$:

$$\forall x \in D_f,\ x \neq 0 \Rightarrow\ 0 \leq \left|\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du\right| \leq \left|\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du\right|$$

.

Puisque la fonction fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du$ a pour limite 0 quand x tend vers 0, le théorème des gendarmes permet de dire que $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du = 0.$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\mapsto 0}\tau(x) = -\dfrac{1}{2}$, f est dérivable au point 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$
La tangente T_0 à (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ i.e } y = -\frac{1}{2}x + 1\,;$$

et on a pour tout x non nul de D_f : $f(x) - (-\dfrac{1}{2}x+1) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{u^2}{1+u}\,du > 0$. Donc la courbe (C_f) est au dessus de sa tangente T_0.

d. Un réel non nul x_0 de D_f est contenu dans un intervalle I_0 ne contenant pas 0.

Dans un tel intervalle, la fonction f est le produit des fonctions dérivables $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$; la fonction f est donc dérivable sur I_0 et en particulier au point x_0.

Comme on sait déja que f est dérivable au point 0, on peut conclure que f est dérivable sur D_f.

3. a. La fonction g est dérivable sur $D_g =]-1, +\infty[$ et

$$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Voici le tableau de variations de g.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On constate d'après le tableau de variations que la fonction g est positive dans D_g.

b. La fonction f est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f,\ x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = -\dfrac{g(x)}{x^2}$
$f'(x)$ est donc < 0 car elle a le même signe que $-g(x)$ pour $x \neq 0$.
La fonction f est alors strictement décroissante dans D_f.
Voici le tableau de variations de f.

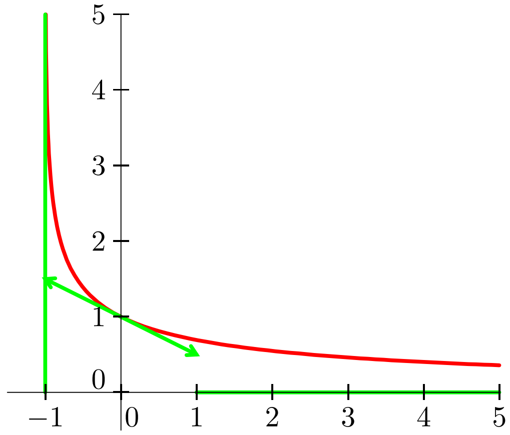
x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\mapsto-1} f(x) = +\infty$

4. Comme $\lim\limits_{x\mapsto-1} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote de $\mathcal{C}$.

La fonction f est décroissante et de limite 0 quand x tend vers $+\infty$, par conséquent, elle est strictement positive (Voir aussi son tableau de variation) ; la courbe (C_f) est donc au dessus de l'axe des abscisses.

5. Voici la courbe $\mathcal{C}$



Partie B

1. La fonction f étant décroissante dans D_f, on a pour tout a et b tels que $a \leq b$ et tout x dans l'intervalle $[a, b]$, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ ce qui entraine par intégration :

$$\int_a^b f(b)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b f(b)\ dx$$

i.e

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)f(a).$$

En appliquant cette relation aux réels $a_k = \frac{k}{5}$, k entier compris entre 0 et 5 on obtient :

$$(a_{k+1} - a_k)f(a_{k+1}) \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\ dx \leq (a_{k+1}a_k)f(a_k),$$

puis par sommation :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f(a_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{4} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\ dx \leq \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f(a_k)$$

et la relation de Chasles entraine

$$\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_{k+1}) \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_k)$$

soit

$$\frac{1}{5}(0.91 + 0.84 + 0.78 + 0.73 + 0.69) \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{1}{5}(1 + 0.91 + 0.84 + 0.78 + 0.73)$$

finalement

$$0.79 \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq 0.85$$

L'aire demandée est donc comprise entre 0.79 u.a et 0.85 u.a

Le logiciel Texgraph donne $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = 0.82246703376263$

2. a. Pour tout x strictement positif on a :

$$f(x) - \frac{1}{1+x} = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{x}g(x) \geq 0$$

b. Soit t un réel strictement positif. En intégrant la relation précédente on obtient :

$$\int_0^t \left(f(x) - \frac{1}{1+x}\right)\, dx \geq 0$$

i.e

$$\int_0^t f(x)\, dx \geq \int_0^t \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(1+t)$$

Or quand t tend vers $+\infty$, $\ln(1+t)$ a pour limite $+\infty$ donc $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\int_0^t f(x)\, dx = +\infty$

3. a. La fonction h est strictement croissante dans $]-1,0]$ car sa dérivée $x \mapsto -\ln(x+1)$ est strictement positive dans cet intervalle ; donc $\forall x \in]-1,0],\ h(x) \in]a, h(0)]$ avec $a = \lim\limits_{x\mapsto -1} h(x) = 0$ et $h(0) = 1$. Par conséquent, on a bien $h(x) \in]0,1]$.

b. Si x appartient à $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$, alors $-1 > \frac{1}{x} \geq -2$ et multipliant par le réel strictement négatif $\ln(x+1)$ on obtient $0 < -\ln(x+1) \leq f(x) \leq -2\ln(x+1)$.

Soit t un élément de $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$.

La relation

$$\forall x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right],\ 0 < f(x) < -2\ln(x+1)$$

s'écrit

$$\forall x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right],\ 0 < f(x) < 2h'(x)$$

et en l'intégrant on obtient :

$$0 \leq \int_t^{-1/2} f(x)\, dx \leq 2\int_t^{-1/2} h'(x)\, dx = 2\Big[h(x)\Big]_t^{-1/2} = 2\big(h(1/2) - h(t)\big) \leq 2$$

La fonction F est donc bien majorée (par exemple par 2.)

c. Pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \int_{-1+1/n+1}^{0} f(x)\, dx - \int_{-1+1/n}^{0} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1+1/n+1}^{-1+1/n} f(x)\, dx \qquad \text{relation de Chasles} \end{aligned}$$

est positive car f est positive dans $]-1,0]$; donc la suite (v_n) est croissante.

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-1+1/n}^{0} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1+1/n}^{-1/2} f(x)\, dx + \int_{-1/2}^{0} f(x)\, dx && \text{relation de Chasles} \\ &= F(-1+1/n) + M && \text{avec } M = \int_{-1/2}^{0} f(x)\, dx \\ &\leq 2 + M && \text{d'après le c.} \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc majoré (par exemple par $2 + M$) ; et comme elle est croissante, elle converge.

$\square$