COMPOSITION N°1-1 DU 1er SEMESTRE :
DUREE : 4H

Exercice 1 :

Soit le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les trois nombres complexes non nuls a, b et c deux à deux distincts tels que $|a| = |b| = |c|$. On note A, B et C les points d'affixes respectifs a' b et c et H le point d'affixe a+b+c.

1) a) Soit $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Exprimer $\overline{w}$ en fonction de w et en déduire que w est un imaginaire pur ou nul.

   b) Montre à l'aide du a) que $(b+c)(\bar{b}+\bar{c})$ et $\dfrac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs ou nuls.

2) a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

   b) Utiliser 2) a) et 1) b) pour démontrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

   c) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC (expliquer sans faire de calculs supplémentaires).

Exercice 2 :

1) a) $\alpha \in IR$. Résoudre dans C : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

   b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation

   $z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1 = 0$ dans laquelle $n \in IN^*$.

2) Etant donné des nombres complexes $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$.

   On note $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$ le produit de $z_0 . z_1 .------. z_{n-1}$

   $\forall n \in IN^*$, $\forall \alpha \in IR$, $\forall z \in C$ on pose $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$

   On admet que pour tout z, n et α $\quad P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$

   a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\left[\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)\right] = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$

   b) $\forall \alpha \in]0,\pi[$ et $\forall n \in IN^* - \{1\}$ on pose $A_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$

   Montrer que $\forall n \neq 0$ on a $2^{n-1}A_n(\alpha) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2n}\right)}$

   c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} A_n(\alpha)$

   d) En déduire que $\forall n \in IN^* - \{1\}$, $\quad \sin\dfrac{\pi}{n}.\sin\dfrac{2\pi}{n}.-----.\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par :

$f :]0;\pi[\to IR$

$x \mapsto \ln \tan \frac{x}{2}$

1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\tan \frac{x}{2}$. Etudier les variations de f. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{2}\ln 3$.
2) Dire pour quoi f possède une bijection réciproque g.
3) Représenter sur un même graphique les courbes de f et g. Possède-t-elle chacune un centre de symétrie ?

Problème :

Soit f la fonction numérique définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = -x + 2 - \dfrac{2x}{x^2+1} & si \quad x \le 1 \\ f(x) = x - 2 + e^{1-x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Soit φ, la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, i, j) $(unite = 2cm)$.

I) 1) Etudier la continuité de f sur IR.

2) Etudier la dérivabilité de sur IR.

3) a)Etudier les variations de f.

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que φ admet deux asymptotes D et D' d' équations respectives y=x-2 et y=-x+2

Etudier la position relative de (C_f) et D sur $]1,+\infty[$ et celle de © et D' sur $]-\infty,1]$

5) Construire (C_f).On placera D, D', les demi tangentes au point d'abscisse -1 et la tangente au point d'abscisse 0.

II) Soit g la restriction de f a $]-\infty,1]$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que (C_g) coupe $\Delta : y = x$ en un point M_0 d'abscisse x_0 de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$, (on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction h définie par h(x)= g(x) –x)
2) Montrer que g est une bijection de $]-\infty,1]$ sur un intervalle J à préciser.
3) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(g^{-1})'(2)$.
4) Soit (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Donner une équation de la tangente en (Γ) au point d'abscisse 2.
   b) Tracer (Γ) (on représentera en particulier la tangente obtenue dans la question précédente.