

Exercice 1 :

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. $A(\sqrt{3} - i)$ soit r la rotation de centre o et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (2π)
 - a) Déterminer l'affixe b de B tel que $r(A) = B$
 - b) Ecrire b sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
 - c) En déduire les exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$
 - d) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = b^3$
2. Soit $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3}$
 - a) Montrer que f admet un point invariant I à préciser
 - b) $M \neq I$ exprimer IM' en fonction de IM et calculer $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$.
 - c) En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques
3. Donner l'expression complexe de f^3
4. Déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f^n soit une homothétie
5. Déterminer la similitude directe g tel que $g \circ r = f$
6. a) Déterminer l'ensemble Δ des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |iz - 2|$
 b) Préciser Δ' image de Δ par f .
7. a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(z)$ tels que $|2iz - 1| = |z + i|$
 b) Préciser $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par f .
8. $M_0(2i), M_{n+1} = f(M_n)$ avec $M_n(z_n); M_{n+1}(z_{n+1})$
 - a) On pose $d_n = M_n M_{n+1}$. Exprimer d'_{n+1} en fonction de d_n
 - b) Calculer la longueur $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$ en fonction de n
 Et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 2 :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1) Calculer I_0
- 2) Déterminer les réels a, b et c pour que $(ax^2 + bx + c)\sqrt{1-x}$ soit une primitive de $x\sqrt{1-x}$
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a : $0 \leq x^n \sqrt{1-x} \leq x^n$
 b) En déduire un encadrement de I_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- 4) Etudier le sens de variation de I_n
- 5) A l'aide d'une intégration par parties sur I_n montrer que $(3 + 2n)I_n = 2nI_{n-1}$
En déduire le calcul de I_1, I_2, I_3
- 6) Calculer $I = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - 3x - 1)\sqrt{1-x} dx$.

Problème :

A) Soit (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$, $x \neq 0$

- 1) $h(x) = e^{-x} \ln x$ vérifier que h est solution de (E)
- 2) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de
(E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$
- 3) Résoudre (E') puis (E).
- 4) Trouver la solution de (E) dont la courbe passe par $A(1; e^{-1})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe (ox).

B)
$$\begin{cases} f(x) = e^{-x}(1 + \ln x) - e^{-1} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (1-x)e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Etudier la continuité de f en $x = 1$.
- 3) a) Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e^{-x} \left(\frac{1 - e^{x-1}}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1} \right)$
b) Etudier la dérivabilité de f en $x = 1$. Interpréter.

C) $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1$

- 1) Donner le tableau de variation de g .
- 2) Calculer $g(1)$ et préciser le signe de $g(x)$
- 3) a) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable
b) Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f
- 4) a) Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$
b) Montrer que $\Delta : y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$
c) Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ sur $] -\infty; 1[$
- 5) Construire (C_f) (unité 1cm)
- 6) Soit k la restriction de f sur $] -\infty; 1[$
a) Montrer que k est bijective de $] -\infty; 1[$ vers J à préciser
b) Calculer $k(0)$ et $k^{-1}(e^{-1})$; k^{-1} est-elle dérivable en e^{-1} ? Si oui calculer $(k^{-1})'(e^{-1})$.
c) Tracer $(C_{k^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .