ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Premier Problème

I : Moyenne de Cesàro d'une suite

1. Soit $\epsilon > 0$, comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \quad : \quad (n \geq n_1) \Longrightarrow |x_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \,.$$

D'autre part, puisque la suite (x_n) est convergente, elle est bornée :

$$\exists M > 0 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq M \,,$$

on a alors lorsque $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} |y_n - \ell| &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_1-1}|x_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_1}^{n}|x_k - \ell| \\ &< \frac{n_1}{n+1}(M+\ell) \ + \frac{n-n_1+1}{n+1} \times \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{n_1}{n+1}(M+\ell) \ + \frac{\epsilon}{2} \,. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad |y_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \,.$$

Puisque ϵ est arbitraire, ceci prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$.

2. On a

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(z_{k+1} - z_k\right) \ = \ \frac{z_{n+1}}{n+1} - \frac{z_0}{n+1} \,.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_0}{n+1} = 0$, il suffit d'utiliser le résultat de la première question à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = z_{n+1} - z_n$.

II : Recherche d'équivalents

1. Comme $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$, on a

$$(\forall \epsilon > 0), \quad (\exists 0 < \eta < 1) \quad : \quad 0 < x < \eta \Longrightarrow -\epsilon + 1 < \varphi(x) < \epsilon + 1 \ ,$$

en particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \rho \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in]0, \rho[$, $\frac{1}{2} < \varphi(x) < \frac{3}{2}$. D'où l'existence de $\rho \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{2} \leq \sup\limits_{x\in[0,\rho]} \varphi(x) \leq \dfrac{3}{2}$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n \leq \rho$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \rho$. La suite (u_n) est alors décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ. Par la continuité de f, on a $f(\ell) = \ell$ et $\ell \in [0, \rho]$, d'où $0 \leq f(\ell) \leq \ell(1 - \frac{a}{2}\ell^\alpha)$, ce qui exige que $\ell = 0$; (car sinon, alors $0 \leq f(\ell) < \ell$, ce qui est en contradiction avec le fait que $f(\ell) = \ell$)

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} &= \frac{u_n^\alpha - u_n^\alpha(1 - au_n^\alpha\varphi(u_n))^\alpha}{u_n^\alpha u_{n+1}^\alpha} \\
&= \frac{1 - (1 - au_n^\alpha\varphi(u_n))^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \\
&= \frac{1 - \left[1 - \alpha au_n^\alpha\varphi(u_n)) + o(u_n^\alpha\varphi(u_n))\right]}{u_{n+1}^\alpha} \\
&= \frac{\alpha au_n^\alpha\varphi(u_n)) + o(u_n^\alpha)}{u_{n+1}^\alpha} \ .
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - au_n^\alpha\varphi(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^\alpha\varphi(u_n) = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \ .$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\right) = \alpha a \ .$$

D'après la question I.2. $\dfrac{1}{u_n^\alpha} \sim n\alpha a$, d'où

$$u_n \sim \left(\frac{1}{\alpha an}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

4. Il suffit d'appliquer les résultats des questions précédentes avec $a = \frac{1}{6}$ et $\alpha = 2$:

$$\sin(x) = x\Big(1 - \frac{1}{6}x^2\varphi(x)\Big) \quad , \qquad \text{avec} \quad \varphi(x) = 6\,\frac{x - \sin(x)}{x^3} \ .$$

On trouve : $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Deuxième Problème

I : Étude analytique

1. Soient $f \in \mathcal{E}$ et F une primitive de f, alors

$$\big[m_a(f)\big](x) = \frac{1}{2a}\big(F(x+a) - F(x-a)\big)\ .$$

Puisque f est continue, sa primitive F est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $m_a(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\big[m_a(f)\big]'(x) = \frac{1}{2a}\big(f(x+a) - f(x-a)\big)$$

2. On a

$$\begin{aligned} m_a(f) \text{ est constante } &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \big[m_a(f)\big]'(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) - f(x-a) = 0\ . \end{aligned}$$

En posant $y = x - a$ dans la dernière égalité, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) - f(x-a) = 0 \iff \forall y \in \mathbb{R},\ f(y+2a) = f(y)\ .$$

On déduit alors des deux équivalences que $m_a(f)$ est constante si et seulement si f est $2a$-périodique.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant le changement de variable $u = -t$ on a :

$$\begin{aligned} [m_a(f)](-x) &= \frac{1}{2a}\int_{-x-a}^{-x+a} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(-u)\,du \\ &= \begin{cases} [m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est paire} \\ -[m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est impaire}\ . \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $m_a(f)$ est donc de la même parité que f.

4. Comme la fonction $m_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, elle est monotone si et seulement si $\big[m_a(f)\big]'$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent d'après 1. à $f(x+a)-f(x-a)$ est de signe constant, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si f est croissante, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) - f(x-a) \geq 0$, ainsi $\big[m_a(f)\big]' \geq 0$ et $m_a(f)$ croissante; de même si f est décroissante alors $m_a(f)$ décroissante.

Ainsi $m_a(f)$ est de même monotonie que f.

5. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

   (a) $m_a(f)$ est à support borné car :

- si $x \geq A+a$, $[x-a, x+a] \subset [A, +\infty[$, donc $\big[m_a(f)\big](x) = 0$,
- si $x \leq -A-a$, $[x-a, x+a] \subset]-\infty, -A]$, donc $\big[m_a(f)\big](x) = 0$,

donc $\big[m_a(f)\big](x) = 0$ pour $|x| \geq A+a$.

(b) Une première intégration par parties, en posant $u = m_a(f)$ et $v' = 1$ donne

$$\begin{aligned}
\int_{-A-a}^{A+a} &\big[m_a(f)\big](t)\,dt \\
&= \Big[t\big[m_a(f)\big](t)\Big]_{t=-A-a}^{t=A+a} - \int_{-A-a}^{A+a} t\frac{1}{2a}\big(f(t+a) - f(t-a)\big)\,dt \\
&= \frac{A+a}{2a}\Big(\int_A^{A+2a} f(t)\,dt - \int_{-A-2a}^{-A} f(t)\,dt\Big) \\
&\quad - \frac{1}{2a}\int_{-A-a}^{A+a} t\big(f(t+a) - f(t-a)\big)\,dt \\
&= -\frac{1}{2a}\int_{-A-a}^{A+a} tf(t+a)\,dt + \frac{1}{2a}\int_{-A-a}^{A+a} tf(t-a)\,dt\ .
\end{aligned}$$

car $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$

Puis, en effectuant les changements de variables $u = t+a$ (resp. $v = t-a$) sur la première (resp. la seconde) intégrale du membre de droite de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-A-a}^{A+a} \big[m_a(f)\big](t)\,dt &= \frac{1}{2a}\Big(-\int_{-A}^{A+2a} (u-a)f(u)\,du + \int_{-A-2a}^{A} (v+a)f(v)\,dv\Big) \\
&= \frac{1}{2a}\Big(-\int_{-A}^{A} (u-a)f(u)\,du + \int_{-A}^{A} (v+a)f(v)\,dv\Big) \\
&= \int_{-A}^{A} f(w)\,dw
\end{aligned}$$

car $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

II : Étude de norme sur $\mathcal{B}$

1. (a)
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1$ et $f(0) = 1$ donc $\|f\| = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq 1$ et $g(0) = 1$ donc $\|g\| = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| = |\lambda|$ donc $\|h\| = |\lambda|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\big[m_a(f)\big](x) &= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} \cos\frac{2\pi t}{a}\,dt = \frac{1}{2a}\frac{a}{2\pi}\Big[\sin\frac{2\pi t}{a}\Big]_{t=x-a}^{t=x+a} \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\sin\frac{2\pi}{a}(x+a) - \sin\frac{2\pi}{a}(x-a)\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\sin\big(\frac{2\pi x}{a} + 2\pi\big) - \sin\big(\frac{2\pi x}{a} - 2\pi\big)\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\|m_a(f)\| = 0$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\left[m_a(h)\right](x)\right| = |\lambda|$ donc $\|m_a(h)\| = |\lambda|$.

(b) On a $[m_a(g)]'(x) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1+(x+a)^2} - \frac{1}{1+(x-a)^2}\right) \leq 0$ si $x \geq 0$, donc $m_a(g)$ est décroissante sur $[0,+\infty[$, positive, et admet un maximum en 0, de plus $m_a(g)$ est paire car g est paire, d'où, $[m_a(g)](0) = \frac{1}{2a}2\arctan a$, et donc $\|m_a(g)\| = \dfrac{\arctan a}{a}$.

2. Soit $f \in \mathcal{B}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\left[m_a(f)\right](x)\right| &= \frac{1}{2a}\left|\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}|f(t)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\|f\|\,dt = \|f\|\end{aligned}$$

donc

$$\forall f \in \mathcal{B}, \qquad \|m_a(f)\| \leq \|f\| \;.$$

3. Si $\|f\| = 1$ alors $\|m_a(f)\| \leq \|f\| = 1$ et $\|m_a(f)\| = \|f\| = 1$ pour $f : x \mapsto 1$, donc :

$$N(m_a) = \sup_{\|f\|=1, f\in\mathcal{B}} \|m_a(f)\| = 1 \;.$$

III : Polynômes de Tchébychev

1. (a) Raisonnement par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. Soit $p \geq 2$; on suppose la formule vraie jusqu'au rang p. En utilisant la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(p+1)x + \cos(p-1)x = 2\cos x\cos px \;,$$

on a

$$\begin{aligned}T_{p+1}(a\cos x) &= \frac{2a\cos x}{a}T_p(a\cos x) - T_{p-1}(a\cos x)\\ &= 2\cos x\cos px - \cos(p-1)x\\ &= \cos(p+1)x \;.\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $(p+1)$.

Par le théorème de récurrence la formule est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) On prend $x = \frac{\pi}{2}$ dans la formule précédente et on obtient

$$T_p(0) = T_p\big(a\cos(\pi/2)\big) = \cos p\frac{\pi}{2} = \begin{cases}0 & \text{si } p \text{ est impair}\\ (-1)^{\frac{p}{2}} & \text{si } p \text{ est pair}\end{cases}$$

Dérivons les deux membres de l'identité $T_p(a\cos x) = \cos px$, $\forall x$, on a

$$-a\sin x\, T_p'(a\cos x) = -p\sin px \;, \quad \forall x \;.$$

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $T_p'(a\cos x) = \dfrac{p}{a}\dfrac{\sin px}{\sin x}$, ce qui donne le résultat en faisant tendre x vers 0.

$$\begin{aligned} T_p'(a) = \lim_{x\to 0} T_p'(a\cos x) &= \lim_{x\to 0} \frac{p^2}{a}\frac{\sin px}{px}\frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{p^2}{a}. \end{aligned}$$

(c) Montrons, par récurrence sur p, que l'entier p et le polynôme T_p sont de même parité. La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. Soit $p \geq 2$; supposons la propriété vraie jusqu'au rang p; alors les polynômes $\frac{2X}{a}T_p$ et T_{p-1} sont de même parité que $(p+1)$ et donc aussi de même parité que $T_{p+1} = \frac{2X}{a}T_p - T_{p-1}$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$. Le théorème de récurrence donne alors le résultat.

2. (a) Montrons, par récurrence sur p, que T_p est un polynôme de degré p et de terme dominant $\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$ pour $p \geq 1$.

La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. Soit $p \geq 2$; supposons la propriété vraie jusqu'au rang p; alors le terme dominant de T_{p+1} est la terme dominant de $\frac{2X}{a}T_p$, soit $\frac{2X}{a}\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$.

Le théorème de récurrence donne donc que T_p est un polynôme de degré p, de terme dominant $\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$ pour $p \geq 1$.

(b) Puisque T_p est un polynôme de même parité que p dont on connaît le terme dominant, pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$T_p = \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p + Q\ ,$$

où Q est un polynôme de degré $\leq (p-2)$. En dérivant $(p-1)$ fois, on a

$$\begin{aligned} T_p^{(p-1)} &= \frac{2^{p-1}}{a^p}(X^p)^{(p-1)} + Q^{(p-1)} \\ &= \frac{2^{p-1}}{a^p}\frac{p!}{1!}X + 0 \end{aligned}$$

et en posant $X = a$, on obtient

$$T_p^{(p-1)}(a) = \frac{2^{p-1}}{a^{p-1}}\,p! \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,\ .$$

3. Puisque T_p est un polynôme de même parité que p, on a

$$\big[m_a(T_p)\big](0) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} T_p(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a T_p(t)\,dt & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

Calculons $m_a(T_{2k})(0)$. Par le changement de variable $t = a\cos u$, on a

$$\begin{aligned}
m_a(T_{2k})(0) &= \frac{1}{a}\int_0^a T_{2k}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 T_{2k}(a\cos u)(-a\sin u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos 2ku)(\sin u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\sin(2k+1)u - \sin(2k-1)u\big]\,du \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{-\cos(2k+1)u}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)u}{2k-1}\Big]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\Big) = -\frac{1}{4k^2-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$\big[m_a(T_p)\big](0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{1-p^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

4. (a) On a $\big[m_a(T_p)\big]'(x) = \frac{1}{2a}\big(T_p(x+a) - T_p(x-a)\big)$, donc

$$\begin{aligned}
\big[m_a(T_p)\big]'(0) &= \frac{1}{2a}\big[T_p(a) - T_p(-a)\big] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{a}T_p(a) = \dfrac{1}{a} & \text{si } p \text{ est impair .} \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarquons que si T_p est paire alors T_p' est impaire et si T_p est impaire alors T_p' est paire, donc

$$\begin{aligned}
\big[m_a(T_p)\big]''(0) &= \frac{1}{2a}\big[T_p'(a) - T_p'(-a)\big] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{a}T_p'(a) = \dfrac{p^2}{a^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) D'après la question **II :** 2.(b), on a

$$\big[m_a(T_p)\big]^{(p)}(0) = \frac{1}{2a}\big[T_p^{(p-1)}(a) - T_p^{(p-1)}(-a)\big] = p!\frac{2^{p-1}}{a^p}\ .$$

5. (a) Le polynôme $m_a(T_p)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; son développement limité à à l'ordre 2, au voisinage de $x = 0$ est donné par

$$\big[m_a(T_p)\big](x) = \big[m_a(T_p)\big](0) + \frac{\big[m_a(T_p)\big]'(0)}{1!}x + \frac{\big[m_a(T_p)\big]''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)\,,$$

ce qui donne

$$\big[m_a(T_p)\big](x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p^2} + \dfrac{p^2}{2a^2}x^2 + o(x^2) & \text{si } p \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{a}x + o(x^2) & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

(b) Remarquons que $m_a(T_p)$ est un polynôme de degré p dont le terme dominant est le terme dominant de T_p, donc

$$m_a(T_p) = \frac{2^{p-1}}{a^p} X^p + Q \ ,$$

où Q est un polynôme de degré $\leq (p-1)$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}$, $m_a(X^k)$ est un polynôme unitaire de degré k, ce qui montre, grâce à la linéarité de m_a, que

$$\big[m_a(T_p)\big](x) \sim_{|x| \to +\infty} \ \frac{2^{p-1}}{a^p} x^p \ .$$

AVRIL 2010

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice *M*.

$\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(p - q/2 - \lambda)^2$, d'où $\lambda = 1$ est une valeur simple et $\lambda = p - q/2$ est une valeur propre double.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice *M*.+

Si $p - q/2 = 1$, alors $M = I$.

Si $p - q/2 \neq 1$, la matrice M est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = p - q/2$ est égale à deux.

On trouve deux vecteurs propres : $u_2(1,-1,0)$ et $u_3(0,-1,1)$. Et $u_1(1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

M est diagonalisable et semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p - q/2 & 0 \\ 0 & 0 & p - q/2 \end{pmatrix}$

3. Calculer M^n pour tout entier *n*.

$M^n = P \Delta^n P^{-1}$, avec $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p - q/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p - q/2)^n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient $M^n = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(p - q/2)^n & 1 - (p - q/2)^n & 1 - (p - q/2)^n \\ 1 - 3(p - q/2)^n & 1 & 1 + 3(p - q/2)^n \\ 1 + (p - q/2)^n & 1 + (p - q/2)^n & 1 - 2(p - q/2)^n \end{pmatrix}$

4. Calculer $\lim_{n\to\infty} M^n$

Pour $p-q/2<1$, $\lim_{n\to\infty} M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, sinon la convergence n'est pas assurée.

Exercice n° 2

Soient $f_n(x)=\int_0^x (1-t^2)^n\, dt$ et $F_n(x)=\int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)}dt$ où *n* est un entier naturel et *x* un nombre réel strictement positif.

1. Trouver une relation de récurrence entre $f_n(1)$ et $f_{n-1}(1)$. En déduire la valeur de $f_n(1)$ en fonction de *n*.
On obtient : $f_0(1)=1$ et $f_1(1)=2/3$

A l'aide d'une intégration par parties :

$$f_n(1)=\left[t(1-t^2)^n\right]_0^1 + 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}dt = 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}dt = 2n\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^{n-1}dt$$

$f_n(1)=-2n\, f_n(1)+2n\, f_{n-1}(1)$, d'où $f_n(1)=\frac{2n}{2n+1}\, f_{n-1}(1)$

Par récurrence, on obtient : $f_n(1)=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

2. Montrer que $\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt = \frac{1}{2(n+1)}$

$\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt = \int_0^1 (\int_t^1 (1-x^2)^n dx)dt$. On fait une intégration par parties, en posant : $u'=1$ et $v=\int_t^1 (1-x^2)^n dx$ et on obtient immédiatement le résultat : $\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt = \frac{1}{2(n+1)}$.

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_n = 1-F_n(1)$

$$u_n = 1-F_n(1) = \int_0^1 \frac{f_n(1)}{f_n(1)}dt - \int_0^1 \frac{f_n(t)}{f_n(1)}dt = \frac{1}{f_n(1)}\int_0^1 (f_n(1)-f_n(t))\,dt = \frac{1}{(2n+1)\,f_n(1)}$$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{2n+4}$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Exercice n° 3

Soient *f* la fonction numérique définie sur R^2 par : $f(x,y)=\exp(-(x^2+y^2))$ et $D=R^+\times R^+$.

1. Calculer $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Soit $K_n=\{(x,y)/x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq n^2\}$.

$I_n=\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{K_n} re^{-r^2}\,dr\,d\alpha=\int_0^{\pi/2}d\alpha\int_0^n re^{-r^2}\,dr=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-n^2}$.

Et $I=\underset{n}{Lim}\,I_n=\frac{\pi}{4}$.

2. En déduire la valeur des intégrales : $\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)dx$.

$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\exp(-x^2)dx\int_0^{\infty}\exp(-y^2)dy=(\int_0^{\infty}\exp(-x^2)dx)^2=\frac{\pi}{4}$. On obtient :

$\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}$

3. En déduire la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$ et interpréter ce résultat.

Par un changement de variable $t=x/\sqrt{2}$, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx=1$. La fonction $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ est positive te d'intégrale égale à 1 sur *R*, c'est donc une densité et on reconnait celle de la loi normale centrée réduite.

4. Soit $f_\alpha : R^+ \to R$ définie par : $f_\alpha(x)=2\varphi(x)\phi(\alpha x)$, où $\alpha\in R$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ et $\phi(\alpha x)=\int_{-\infty}^{\alpha x}\varphi(t)\,dt$. Déterminer $\underset{\alpha\to+\infty}{Lim}\,f_\alpha(x)$

Pour *x*=0, $\underset{\alpha\to+\infty}{Lim}\,f_\alpha(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ et

Pour $x\neq 0$, $\underset{\alpha\to+\infty}{Lim}\,f_\alpha(x)=2\varphi(x)$

5. Déterminer $\underset{\alpha\to+\infty}{Lim}\,f_\alpha(x)$ dans le cas où $\varphi(x)=x\exp(-x^2)$

Pour tout *x*, $\underset{\alpha\to+\infty}{Lim}\,f_\alpha(x)=0$

Exercice n° 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs.

1. Etudier, selon la nature de la série de terme général u_n, la convergence de la série de terme général : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

Si $\underset{n}{Lim}\, u_n = 0$, alors v_n est équivalent à u_n et les deux séries sont de même nature.

Si $\underset{n}{Lim}\, u_n \neq 0$, alors $\underset{n}{Lim}\, v_n \neq 0$ et les deux séries sont toujours de même nature.

2. Etudier, selon la nature de la série de terme général u_n, la convergence de la série de terme général : $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$

Si la série de terme général u_n converge, alors $\underset{n}{Lim}\, u_n = 0$ et w_n est équivalent à u_n, donc la série de terme général w_n converge.
Si la série de terme général u_n diverge et si la suite (u_n) est majorée $(u_n \leq K)$, on a : $w_n \geq \dfrac{u_n}{1+K^2}$ et la série de terme général w_n diverge également.

Si la série de terme général u_n diverge et si la suite (u_n) n'est pas majorée, on ne peut rien dire sur la série de terme général w_n. Par exemple, pour $u_n = \sqrt{n}$, la série de terme général w_n diverge et pour $u_n = n^2$, la série de terme général w_n converge .

Exercice n° 5

Soient $f, g : [a,b] \to R$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. On pose $\varphi(x) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a))$.

Déterminer λ et μ de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Comme $\varphi(a) = 0$, il faut aussi $\varphi(b) = \lambda(f(b) - f(a)) + \mu(g(b) - g(a)) = 0$. Parmi les solutions possibles, on trouve : $\lambda_0 = -(g(b) - g(a))$ et $\mu_0 = f(b) - f(a)$. Les autres couples (λ, μ) vérifient : $(\lambda, \mu) = (k\lambda_0, k\mu_0)$.

2. En déduire que : $\exists c \in\,]a,b[, (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$
On applique le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$, il vient : $\varphi'(c) = 0$, ce qui donne la relation recherchée.

3. En déduire, sous des conditions que l'on précisera que : $\exists c \in \left]a,b\right[, \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$

Il faut que $g^{'}$ ne s'annule pas sur $\left]a,b\right[$ puisque $g(b)-g(a) \neq 0$ par le théorème des accroissements finis appliqué à g sur $[a,b]$.

Exercice n° 6

Trouver toutes les matrices qui commutent avec :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice M est diagonalisable et semblable à : $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $M = P\Delta P^{-1}$ et $\Delta = P^{-1}MP$.

Soit B une matrice qui commute avec M. Posons $X = P^{-1}BP$. On obtient : $MB = P\Delta XP^{-1}$ et $BM = PX\Delta P^{-1}$. Donc $\Delta X = X\Delta$ et il faut et il suffit que X commute avec la matrice diagonale Δ.

En écrivant les produits ΔX et $X\Delta$, on trouve la condition nécessaire et suffisante : X matrice diagonale. Soit $X = diag(a,b,c)$, on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 4a-8b+6c & -8a+16b-8c & 16a-40b+24c \\ -3a+3c & 6a-4c & -12a+12c \\ -2a+2b & 4a-4b & -8a+10c \end{pmatrix}$$