DEVOIR N°2-1 DU 2nd SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$, unité 2cm. On considère l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que $|z-1-i|=\frac{1}{4}\left|z+i\bar{z}-8(1+i)\right|$ (1)

1. **a.** Montrer que l'ensemble des points d'affixes z tels que **:**
   $z+i\bar{z}-8(1+i)=0$ est une droite (Δ).

   b. En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (E) est une conique de foyer F d'affixe $1+i$, de directrice la droite (Δ) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.
2. **a.** Préciser l'axe focale (D) de (E).

   b. Vérifier que les points A et A' d'affixe respectives $2+2i$ *et* $-2-2i$ sont des sommets de (E).

   c. Placer ces éléments sur une figure et construire géométriquement les sommets de (E) situés sur l'axe focal.

   d. Donner l'allure de (E) en précisant les tangentes aux sommets.

Exercice 2 :

Une urne contient 5 jetons blancs (un carré, trois ronds et un triangle), quatre jetons noirs (trois carrés et un triangle) et trois jetons rouge (un carré et deux ronds).
On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :
   - **a.** trois jetons de couleurs différentes.
   - **b.** trois jetons de formes différentes.
   - **c.** trois jetons de même forme.
   - **d.** trois jetons de même couleur.
   - **e.** trois jetons de même forme et de même couleur.
   - **f.** trois jetons de formes différentes et de couleurs différentes.
   - **g.** un jeton d'une couleur et deux d'une autre.
   - **h.** exactement deux jetons noirs et un carré.

Problème :

Pour tout entier $n\geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, (avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ *et* $\left\|\vec{j}\right\|=10cm$)

A. **1.** Etudier les variations de f_n sur $[0;+\infty[$

Pour $n \geq 2$, étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n-1}) et vérifier que le point $A_n(n;\ f_n(n))$ de (C_n) est aussi sur (C_{n-1}).

2. Construisez sur un même graphique les courbes (C_1), (C_2) et (C_3).

B. **1.** Soit (U_n) la suite définie par $U_n = f_n(n)$.

En utilisant les résultats de la partie **A.** montrer que (U_n) est décroissante.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$

a. Montrer que pour tout t de $[0\,;1]$, $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$

b. Déduisez en que, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3. **a.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

b. Déduisez en que, pour tout n, $n \geq 2$ $\quad U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+....+\frac{1}{2}+1\right)}$

4. **a.** Démontrer que pour tout $n \geq 2$ $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$

b. Déduisez en que, pour tout $n \geq 2$ $\quad U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. Quelle est la limite de la suite (U_n)

C. Pour a fixé, positif, et pour tout entier n, $n \geq 1$, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}dt$

1. Calculer $I_1(a)$.

2. Montrer que pour $n \geq 1$ **,** pour tout $t \geq 0$, $\quad 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{t^n}{n!}$

Déduisez en un encadrement de $I_n(a)$.

3. Montrer que pour $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$. Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quant n tend vers $+\infty$.

4. Trouver lorsque $n \geq 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et déduisez en que pour tout $n \geq 2$ $\quad I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \dfrac{a}{1!} + \dfrac{a^2}{2!} + ... + \dfrac{a^n}{n!}\right)$

L'égalité est-elle valable pour $n = 1$