REVISION DU 1er TRIMESTRE :

SERIE N°1 : POLYNOME-EQUATION, INEQUATION ET SYSTEME

Exercice 1 :

1) Soit $p(x) = -3x^3 + (4+3a)x^2 - (4a+1)x + a$; $a \in R$
   a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout réel $p(x) = (x-a)Q(x)$.
   b) En déduire une factorisation de $p(x)$.
2) Soit $(x) = x^5 + ax^4 + b$, a et b sont des réels.
   Trouver a et b pour qu'il existe un polynôme g vérifiant $f(x) = (x-1)^2 g(x)$.

Exercice 2 :

1) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 - 8x + b$ soit divisible par $(x+1)(x-3)$.
2) Déterminer un polynôme du second degré divisible par $x-2$ et par $x+1$ et dont le reste de la division par $x-1$ soit 5.

Exercice 3 :

On donne l'équation d'inconnue x et de paramètre m $(E):(m+2)x^2 - 2(m+1) + m - 1 = 0$

1) Etudier suivant les valeurs de l'existence et la valeur des racines de (E)
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) possède :
   a) deux racines de signes contraires
   b) deux racines positives
   c) deux racines négatives
   d) deux racines inverses
3) dans le cas où (E) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 indépendante de m

Exercice 4 :

Soit $f(x) = ax^4 + bx^3 + x^2 + bx + c, avec\, a \neq 0.$

1° Montrer que 0 n'est pas racine de f(x), puis que si α est raine de f(x), alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.

2° Si $x \neq 0$, on pose $y = x + \frac{1}{x}$.

a) Exprimer y^2 et en déduire l'expression de $\frac{f(x)}{x^2}$ en fonction de a, b, y et y^2.
b) Montrer que résoudre l'équation f(x) = 0 revient à résoudre successivement deux équations du second degré.
c) Montrer que $b^2 < 4a(-2a)$, alors l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution.

3° Résoudre l'équation $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0.$

Exercice 5 :

Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes ::

1)$\sqrt{x^2+x} = 2x - 1$; 2)$\sqrt{x-1} = 2(x-4)$; 3)$x + \sqrt{x-1} \geq 3$; 4)$\sqrt{x^2-2x} \leq x - 2$
5) $\sqrt{2x^2+5x-7} < 3 - x$; 6) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 3$; 7) $x^4 - 11x^2 + 1 = 0$
8) $(x^2-5x)^2 = x^2 - 5x + 42$; 9) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4+5x^2-6} \leq 0$; 10) $x^4 - 2x^2 - 11 > 0$

Exercice 6 :

Résoudre dans R^3 les systèmes suivants :

$$a)\begin{cases} x+2y+2z=15 \\ 3x+4y+z=17 \\ -2x+2y+3z=10 \end{cases} \quad ; \quad b)\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 3x+2y+z=6 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \quad ; \quad c)\begin{cases} x+y+4z=15 \\ 3x+4y+z=17 \\ -2x+2y+3z=10 \end{cases}$$

Problème 1 :

1) Déterminer un polynôme P de degré 4 vérifiant $P(x)-P(x-1)=x^3$. Calculer

$S=1+2^3+3^3+......+n^3$

2) On se propose de résoudre une équation du troisième degré ne possédant pas à priori, une racine particulière.

A. Soit le polynôme $P(x)=10x^3-9x^2+9x+1$

a) On pose x = y +h. Déterminer le polynôme Q(y) obtenu en remplaçant x par x par y + h dans P(x).

b) Déterminer h de façon que : $Q(y)=10(y^2+\alpha y+\beta)$ où α *et* β sont deux réels que l'on déterminera.

B. Cette partie a pour but de déterminer deux réels les racines de Q(y).

1) Déterminer deux réels b et c tels que : $\beta=b^3+c^3$ *et* $\alpha=-3bc$.

2) Prouver que $y^3+b^3+c^3-3ybc$ est factorisable par y + b + c. Effectuer alors cette factorisation.

3) Déduire de ce qui précède une racine de Q(y) puis une racine de P(x).

C. Terminer la résolution de l'équation P(x) = 0.

Problème 2 :

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $x^3+3x^2+15x-99=0$ **(E)**

1. On se ramène se ramène è la résolution d'une équation : $x^3+px+q=0$

a) Trouver trois réels a, p et q tels que pour tout x,

$x^3+3x^2+15x-99=(x+a)^3+p(x+a)+q$.

b) En posant X = x+a, vérifier que $X^3+12X-112=0$. On la note **(E_1).**

2) **On résous l'équation** $X^3+12X-112=0$ **(E_1).**

Pour cela on pose X= u + v

a) Vérifier que $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$. Déduisez-en que :

- Lorsque X= u+v, $X^3+12X-112=u^3+v^3+(3uv+12)(u+v)-112$
- X= u+v est solution de **(E_1)** lorsque : $u^3+v^3=112$ *et* $u^3v^3=-64$

b) Trouver deux réels u et v tels que $U^3 + V^3 = 112$ *et* $U^3V^3 = -64$ (Indication : poser $u^3 = U$ *et* $v^3 = V$.

c) Résolvez alors l'équation **(E₁)** (Indication : vérifier que $\left(2+2\sqrt{2}\right)^3 = 56+40\sqrt{2}$ **.**

d) Résoudre l'équation (**E**).

SERIE N°2 : APPLICATION

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \quad ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2x-3}{6x^2-|13x-5|} \quad ; \quad i(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2+2X}}$$

Exercice 2 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ *et* $g(x) = \frac{x+1}{X-2}$

1) Déterminer les domaines des fonctions f o g , g o f , f o f et g o g.
2) Calculer les expressions f o g(x) , g o f (x), f o f(x) et g o g (x).

Exercice 3 :

Pour chacune des fonctions suivantes, on répondra aux questions : est-ce une application ? si c'est une application, est-elle injective, surjective, bijective ?

$$f: R^+ \to \left[-\frac{9}{4} ; +\infty\right[\quad ; \quad g: [3;+\infty[\to [-1;+\infty[\quad ; \quad h:]-3;1[\to R \quad ; \quad i: [\![3;5]\!] \to [\![5;9]\!]$$

$$x \longmapsto x^2 - 3x \qquad\qquad x \longmapsto x^2 - 3x \qquad\qquad x \longmapsto \frac{3-x}{x+1} \qquad\qquad x \longmapsto \frac{2x+3}{x-2}$$

Exercice 4 :

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$$a)\ f: IR \to IR \qquad\qquad b)\ g: R-\{2\} \longrightarrow R-\{2\}$$

;

$$x \mapsto 5-3x \qquad\qquad x \longmapsto \frac{3x-4}{4x-8}$$

SERIE N°3 : BARYCENTRE-LIGNE DE NIVEAU

Exercice 1 :

On donne dans le plan , deux points A et B tels que AB = 4.
Soit l'application du plan dans IR définie par : $f(M) = MA^2 + MB^2$.
1° Déterminer les lignes de niveau de l'application f associées aux réels 5, 8 et 12.
2° Discuter suivant les valeurs de k, la nature de la ligne de niveau k.
3° Déterminer l'ensemble des points du plan tels que : $12 \le MA^2 + MB^2 \le 24$.

Exercice 2 :

Soit A et b tels que AB = 3.
1° Construire les barycentres I de (A,1) et (B,2), et J de (A,1) et (B,-2).
2° a) Montrer que MA = 2 MB équivaut à : $\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

b) En déduire que l'ensemble des points du plan vérifiant MA = 2 MB est le cercle de diamètre [IJ]. Le construire.

3° Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=16$. Le construire.
4° a) Déduire des questions précédente la construction d'un triangle ABC tel que :
AB = 2 CB et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=16$.
b) Calculer alors les longueurs CB et CA.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle rectangle en A, de centre de gravité G, et A' le milieu du segment [BC].
On pose AB = a.
1° Exprimer $4\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.
2°Exprimer GA^2+GB^2 en fonction de a. En déduire que $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{2}{3}a^2$.
3° Prouver que pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$
4° Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :
$MA^2+MB^2+MC^2=\frac{3}{4}a^2$