DEVOIR N°2-1 DU 2nd SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

Soit la fonction f, la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

1° Montres que f admet une primitive F sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0.

2° Soit la fonction g définie par $G(x)=F(\tan x)$.

a) Calculer G'(x), G(0) et en déduire G(x).

b) Que représente F pour la fonction tan ?

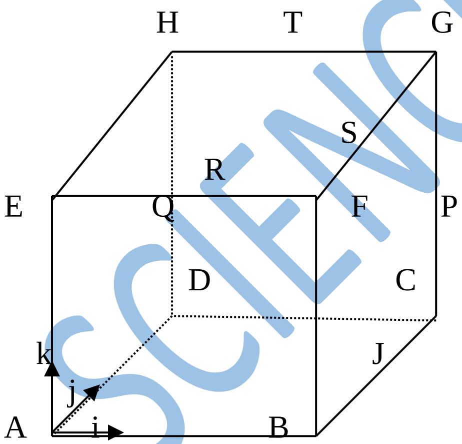
3° Donner les primitives des fonctions suivantes ;

a) $f(x)=\frac{x-1}{\left(x^2-2x\right)^3}$

b) $f(x)=\tan^2 x+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

Exercice 2 :

Le cube ABCDEFGH a une arête de longueur 4 cm ; les points J, P, Q, R, S et T sont les milieux respectifs des arêtes respectifs [BC], [CG], [DH], [EF], [FG] et [GH]. On pose $\vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.



1°Justifier que $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.

2° Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (JQR) et (PSD).

3° En déduire une équation cartésienne de chacun des plans (JQR) et (PSD).

4° Calculer la distance de A au plan (JQR), puis au plan (PSD).

Problème :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{x+1} \, si\, x \prec 0 \\ x+\sqrt{|x^2-x|} \, si\ x \geq 0 \end{cases}$.

On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) *a)* Déterminer Df et calculer les limites aux bornes de Df ?
b) Etudier la continuité de f en 0.

c) Etudier la dérivabilité de f en $x_1=0$ *et* $x_2=1$. Que peut-on en déduire pour (Cf) aux points d'abscisse 0 et 1 ?
d) Montrer que f est dérivable sur $D_f-\{0;1\}$ et calculer f'(x) dans chaque intervalle du domaine de dérivabilité de f.
e) Résoudre sur $]0;1[$ l'inéquation $2\sqrt{x-x^2}+1-2x\leq 0$. En déduire le signe de f'(x) sur $]0;1[$.Dresser le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que (Cf) admet une asymptote oblique *(*Δ*)* en $+\infty$? Etudier la position relative de *(*Δ*)* et de *(Cf)* sur $]1;+\infty[$.
b) Montrer que (Cf) admet une asymptote oblique *(D)* en $-\infty$?
(On déterminera les réels a, b et tels que
$\forall x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1:0[\,;f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$**)** Etudier la position relative de *(D)* et de *(Cf)* sur $]-\infty;0[$.

3) Soit g la restriction de f à *I*=$]1;+\infty[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle j qu'on précisera.
b) La bijection réciproque g^{-1} de g est-elle sur J ? Calculer $g^{-1}{}'(2)$.
c) Donner l'expression de $g^{-1}{}'(x)$
d) Construire (Cf) et *(*Cg^{-1}*)* dans un même repère.