

DEVOIR N°2-1 DU 1^{er} SEMESTRE :DUREE : 3HExercice :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

- 1) Démontrer que f est paire. Etudier sa variation.
- 2) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 3) Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ a et b étant des réels à déterminer.
- 4) Donner l'ensemble des primitive de f .
- 5) Soit F la fonction définie par $F(x) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$
 - a) Déterminer son ensemble de définition. Etudier sa variation.
 - b) Démontrer que F est impaire. Calculer les limites aux bornes et préciser les asymptotes.
 - c) Préciser la tangente à C_F à l'origine du repère.
 - d) Calculer $F\left(\frac{3}{2}\right)$; $F\left(\frac{5}{2}\right)$; $F(4)$. Tracer C_F .
- 6) Soit (D) la droite d'équation $y = x + m$ où m est un paramètre réel non nul
 - a) Démontrer que l'intersection de la droite (D) et de la courbe C_F comporte exactement deux points puis calculer leurs abscisses respectives x_1 et x_2 .
 - b) Vérifier que $x_1 x_2$ est indépendant de m .

Problème :Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1° Démontrer que pour tout t de I on a : $g'(t) = \frac{-t^3}{1+t}$ 2° Dédire de 1 que pour tout t de I , on a

$$\begin{cases} -2t^3 \leq g'(t) \leq 0, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 \leq g'(t) \leq -2t^3, & \text{si } -1/2 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad \text{puis, démontrer que pour tout } x \text{ de } I, \text{ on a : } \frac{-1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$$

(Indication : On pourra considérer la fonction $k : x \mapsto g(x) + \frac{1}{2}x^4$ pour tout $x \in I$)

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm)

1°.a) Vérifier que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$ $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

b) En utilisant l'inégalité trouver en A.2 démontrer que f est dérivable en 0 et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) un point d'abscisse 0.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse

2° Soit h la fonction définie sur par : $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variation de h. Calculer h(0) et en déduire le signe de h sur $] -1; +\infty[$

b) Démontrer que pour tout x appartenant à $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

d) Soit ψ la restriction de f sur $] -1; 0]$. Justifier que ψ est bijective de $] -1; 0]$ vers un intervalle K à

préciser. ψ^{-1} est-elle dérivable en $\frac{1}{2}$? Si oui calculer $(\psi^{-1})'(\frac{1}{2})$

3° Construire la courbe (C) et la tangente (T). Préciser les asymptotes à (C).

Partie C

1° a) Démontrer que la fonction ϕ définie sur $] -1; +\infty[$, par $\phi(x) = f(x) - x$ est continue est strictement croissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $] -1; +\infty[$ et que $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$.

2° Sachant que $\forall x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$, démontrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$-\frac{1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$ puis que pour tout (On pourra utiliser les résultats du B.2).

3° Soit J l'intervalle $[\frac{1}{4}; 1]$ Démontrer que $f(J) \subset J$.

4° On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, démontrer que

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminera sa limite.

d) Déterminer l'entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.