AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit p un projecteur, il vérifie par définition $p = p^2$. Soit λ une valeur propre de p, on a alors :

$\exists x \neq 0 / p(x) = \lambda x$. D'où : $p(x) = p^2(x) = \lambda p(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda x = \lambda^2 x$, et comme x est non-nul : $\lambda \in \{0,1\}$. La trace de p est donc une somme de 0 et de 1, c'est un entier naturel.

$Tr(S) = Tr(A) + \sqrt{2}Tr(B) + \sqrt{3}Tr(C)$ par linéarité.

On veut $\sqrt{2}Tr(B) + \sqrt{3}Tr(C) \in \mathbb{N}$, avec $Tr(B) \in \mathbb{N}$ et $Tr(C) \in \mathbb{N}$. Montrons que ce n'est possible qu'avec $Tr(B) = Tr(C) = 0$:

Soit $(a,b,c) \in N^3 \,/\, a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$.

En élevant au carré, on a : $2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = c^2 \Leftrightarrow 2ab\sqrt{6} = c^2 - (2a^2 + 3b^2)$

Le terme de droite est un entier relatif, comme $\sqrt{6}$ est irrationnel il faut que $2ab$ soit nul pour vérifier l'égalité. Mais si $a = 0$, on a $b\sqrt{3} = c$ et donc forcément b et c doivent être nuls car $\sqrt{3}$ est irrationnel. De même si $b = 0$. Conclusion : $(a,b,c) = (0,0,0)$, et donc $Tr(B) = Tr(C) = 0$.

Les matrices B et C sont donc des projecteurs sur le vecteur nul, ce sont des matrices nulles.

La réciproque est triviale, si B et C sont nulles, $S = A$ donc S est idempotente.

Exercice n° 2

Question 1 : $\deg(f(P)) \leq \deg(P)-1$ car on perd le terme dominant. En effet, en posant $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$, on a $P(X+1)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$ et le coefficient devant X^{n-1} est dans les deux cas p_{n-1}.

De même, $\deg(f^2(P)) \leq \deg(f(P))-1 \leq \deg(P)-2$, et par une récurrence immédiate : $\deg(f^k(P)) \leq \deg(P)-k, \forall k \in \{0,...,n-1\}$.

Or le degré de P est au plus $n-1$ donc $\deg(f^{n-1}(P)) \leq 0$. Ainsi, $f^{n-1}(P)$ est un polynôme constant ou nul, donc $f^n(P)$ est le polynôme nul.

Question 2 : Montrons par récurrence la relation demandée :

C'est trivialement vrai pour $r=0$, il reste à montrer l'hérédité :

$$f^{r+1}(P)(X)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k} f(P(X+k)) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}(P(X+k+1)-P(X+k))$$

$$=\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{r-k+1}\binom{r}{k-1}P(X+k)-\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}P(X+k)$$

$$=(-1)^{r+1}\binom{r}{0}P(X)+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k+1}\left(\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}\right)P(X+k)+(-1)^0\binom{r}{r}P(X+r+1)$$

$=\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^{r+1-k}\binom{r+1}{k}P(X+k)$, car $\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}=\binom{r+1}{k}$, de plus $\binom{r}{0}=\binom{r+1}{0}=1$, et $\binom{r}{r}=\binom{r+1}{r+1}=1$

La formule est donc démontrée.

On a donc :

$$\forall X \in R, \quad 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$$

$$(-1)^{n+1}P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$$

$$P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}P(X+k)$$

C'est la formule demandée, avec $a_k=(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice n° 3

Question 1 :

On a : $u(e_i)=\sum_{j=1}^{n}< u(e_i), f_j > f_j$

Donc $\|u(e_i)\|^2=\sum_{j=1}^{n}< f_j, u(e_i) >^2$

Question 2 :

Ainsi, $A=\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2=\sum_{i=1}^{n}< u(e_i), u(e_i) >$

En appelant u^* l'adjoint de u (il existe et est unique puisque $u\in L(E)$) :

$$A=\sum_{i=1}^{n}< e_i, u^*\circ u(e_i) > \quad =Tr(u^*\circ u)$$

Exercice n° 4

Question 1 :

« $\Leftarrow$ » : $B(f(x), f(x))=B(x,x)\Leftrightarrow q(f(x))=q(x)\Rightarrow f\in G$

« $\Rightarrow$ » : $B(f(x), f(y))=\frac{1}{2}(q(f(x)+f(y))-q(f(x))-q(f(y)))$

$=\frac{1}{2}(q(f(x+y))-q(f(x))-q(f(y)))$ par linéarité de f

$=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$ car $f\in G$

$=B(x,y)$

Question 2 :

- $q(f \circ g(x)) = q(g(x))$ car $f \in G$
  $= q(x)$ car $g \in G$
  donc $f \circ g \in G$

- $q(Id(x)) = q(x) \Rightarrow Id \in G$

- $Ker(f) = \{x / f(x) = 0\}$, $x \in Ker(f) \Rightarrow q(f(x)) = q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ car q n'est pas dégénérée.

f est un endomorphisme de R^n, la dimension est finie, f est injective (car le noyau est réduit à l'élément nul), donc f^{-1} existe.
$q(f \circ f^{-1}(x)) = q(x) = q(f^{-1}(x))$ car $f \in G$
Donc $f^{-1} \in G$
$(G, \circ)$ est un sous groupe de $GL(R^n)$

Question 3 :

On a $f(x) = AX$ et $q(x) = {}^tXMX$, d'où : ${}^tX\,{}^tAMAX = {}^tXMX \ \forall X$, par définition de $f \in G$.

Cela implique que ${}^tAMA = M$.
Comme A et M sont des matrices carrées, $(Det(M))(Det(A))^2 = DetM$.
D'où $DetA = 1$ ou -1 car $(Det(M)) \neq 0$.

Question 4 :

$$q(f(e_4)) = q\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix} = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}^2$$

$q(f(e_4)) = q(e_4) = -1$
D'où $a_{44}^2 = 1 + a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 \geq 1$
${}^tAMA = M \Rightarrow {}^tAM = MA^{-1} \Rightarrow M^{-1}\,{}^tAM = A^{-1}$

Or ici $M^{-1} = M$ car $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on voit que $M^2 = I_4$.

D'où $A^{-1} = M\,{}^tAM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$

Exercice n° 5

Question 1 : Montrons que $\varphi^{-1}(H) = \{n \in Z \,/\, g^n \in H\}$ est un sous-groupe de $(Z,+)$:

- $0 \in \varphi^{-1}(H)$ car $g^0 = e_G$, où e_G représente l'élément neutre pour la multiplication. H étant un groupe, il contient e_G.
- $\forall (m,n) \in (\varphi^{-1}(H))^2$, $g^{m+n} = g^m g^n \in H$ car g^m et g^n appartiennent à H, stable par multiplication interne. D'où $m+n \in \varphi^{-1}(H)$.
- $\forall n \in \varphi^{-1}(H)$, $-n \in \varphi^{-1}(H)$ car $g^n g^{-n} = g^0 = e_G$, donc $g^{-n} \in H$ en tant qu'inverse de g^n.

Donc $\varphi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(Z,+)$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in N$ tel que $\varphi^{-1}(H) = sZ$.
Montrons rapidement ce résultat : soit $a \in N$.

- $0 \in A$, par existence de l'élément neutre pour l'addition.
- $\forall n \in N^*, na \in A$ car l'addition est interne.
- $\forall n \in N^*, -na \in A$ par existence de l'inverse pour l'addition.

Cela nous donne l'inclusion dans un sens, pour la réciproque il suffit de noter que l'addition dans aZ est associative, et que donc $(aZ,+)$ est un groupe.

Soit r l'ordre du groupe G :
$\varphi^{-1}(H) \supset \varphi^{-1}(\{e_G\}) = rZ$. Donc $rZ \subset sZ$, on en conclut que s divise r.

Question 2 : G est engendré par $\{g\}$ donc $g_0 \in G$, $\exists k \in N \,/\, g_0 = g^k$ donc φ est surjective.

On a trivialement que $\varphi(\varphi^{-1}(H)) \subset H$, montrons l'autre inclusion : soit $h \in H$, on veut qu'il existe n_0 tel que $n_0 \in \varphi^{-1}(H)$ et $h = g^{n_0}$. Or comme H est inclus dans G et que φ est surjective, l'existence de ce n_0 est assurée, et il appartient bien à $\varphi^{-1}(H)$ par définition de cet ensemble. On a donc : $H = \varphi(\varphi^{-1}(H))$.

Question 3 : $H = \varphi(sZ) = \{g^{sn} \,/\, n \in Z\}$. Les sous-groupes de G sont donc les groupes engendrés par $\{g^s\}$, avec s divisant r.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x, y) = (x-y)^2 + (x^2 - 2ay - b)^2$, où a et b sont deux constantes réelles données.

1. *f* est-elle bornée ? A quelle condition *f* peut-elle être nulle ?

f étant toujours positive, elle est minorée par zéro. Par ailleurs, $\underset{x \to \infty}{Lim} f(x, 0) = +\infty$, donc *f* n'est pas majorée.

$f(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $x^2 = 2ay + b$, soit $y^2 - 2ay - b = 0$. Cette équation admet des racines pour $a^2 + b \geq 0$.

Si $a^2 + b > 0$, f admet un minimum absolu égal à zéro, en deux points (cf. question 3).

2. On suppose que $a^2 + b < 0$, trouver, s'ils existent, les extrema de *f*.

Les conditions du premier ordre doivent être satisfaites pour obtenir des extrema.

$f_x^{'}(x, y) = 2(x - y) + 4x(x^2 - 2ay - b) = 0$ et $f_y^{'}(x, y) = -2(x - y) - 4a(x^2 - 2ay - b) = 0$.

Par addition, on obtient : $(x - a)(x^2 - 2ay - b) = 0$.

Si $(x^2 - 2ay - b) = 0$, alors $x = y$ et $(x^2 - 2ay - b) = 0$, mais comme $a^2 + b < 0$, on n'a pas de solution. Par conséquent $x = a$, puis $y = \dfrac{2a^3 - 2ab + a}{1 + 4a^2}$. On a une seule solution qui correspond à un minimum local.

3. On suppose que $a^2 + b > 0$. Chercher les extrema locaux et absolus de *f*.

Comme $a^2 + b > 0$, on a un minimum absolu (nul) atteint en deux points (cf . question 1) et un minimum local pour $x = a$ (cf. question 2).

Exercice n° 2

Soit $f : R^* \to R$ définie par : $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$.

1. Tracer avec précision le graphe de f.

La dérivée de f est égale à $f^{'}(x) = \dfrac{2^x}{x^2}(xLog2 - 1)$. Cette fonction est croissante pour $x \geq 1/Log2$ et décroissante sinon. Elle admet un minimum local en $x = 1/Log2$ égal à $eLog2$. Son graphe présente une branche parabolique dans la direction y (en $+\infty$) et les axes sont des asymptotes.

2. Résoudre l'équation : $2^x = x^2$ (on donnera des valeurs approchées avec une erreur inférieure à 0,5).

L'équation $2^x = x^2$ est équivalente à $\dfrac{2^x}{x} = x$ ($x = 0$ n'est pas solution). Les solutions de cette équation correspondent aux points d'intersection entre le graphe de f et la première bissectrice. On a 3 solutions graphiques : deux solutions évidentes $x = 2,$ et $x = 4,$ et une solution négative. La racine négative est comprise entre -1 et -1/2 (on calcule la valeur de *f* en ces points et on compare à x).

Exercice n° 3

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ définie, pour $x > -1$ et $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = nx\frac{(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 1.$$

1. Etudier la continuité de la fonction f_n pour tout $x > -1$.

f_n est continue pour $x \neq 0$ comme quotient de fonctions continues.

Et $\underset{x\to 0}{Lim}\, f_n(x) = \underset{0}{Lim}\, nx\dfrac{(1+nx)}{nx} = 1 = f_n(0)$. Donc f_n est continue en zéro.

2. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe pour tout $x > -1$.

On trouve $f_n^{'}(x) = n\dfrac{(1+x)^{n-1}}{((1+x)^n - 1)^2}\left[(1+x)^{n+1} - (n+1)x - 1\right]$ et $f_n^{'}(x)$ est du signe de $g(x) = (1+x)^{n+1} - (n+1)x - 1$. On a : $g^{'}(x) = (n+1)((1+x)^n - 1)$, cette dérivée est positive pour $x > 0$, nulle pour $x = 0$, négative sinon et $g(0) = 0$. Donc la dérivée de f_n est toujours positive et f_n est croissante de $\left]-1,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$. D'ailleurs, on peut prolonger f_n par continuité à droite en -1 en posant : $f_n(-1) = 0.$ Elle admet une asymptote d'équation $y = nx$.

Exercice n° 4

On pose : $P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.

On vérifie, par division euclidienne, que $P(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)$

2. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$, trouver une primitive de $f(x)$ que l'on notera $F(x)$.

La fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ admet une décomposition de la forme :

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}$$

Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles complexes des fractions ou en prenant des valeurs particulières. Par exemple :

- On multiplie la relation par x, puis $x \to +\infty$, on obtient : $a + c = 0$
- Pour $x = 0$, on obtient : $1/2 = b + d/2$
- Pour $x = 1$, on obtient : $1 = 5(a + b) + 2(c + d)$
- Pour $x = -1$, on obtient : $1 = b - a + 2(-c + d)$

La résolution du système donne : $a = -\dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{1}{5}$, $c = \dfrac{2}{5}$, $d = \dfrac{3}{5}$.

En conclusion : $f(x) = \dfrac{1}{5}(\dfrac{-2x + 1}{x^2 + 1} + \dfrac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2})$

On peut encore écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{5}(\frac{-2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}).$$

Une primitive est de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{5}(-Ln(x^2 + 1) + Arctgx + Ln(x^2 + 2x + 2) + Arctg(x + 1))$$

3. Vérifier que $F(x)$ admet des limites finies lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} F(x) = \dfrac{1}{5}(Ln(\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1})) + \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5}$ et $\lim\limits_{-\infty} F(x) = \dfrac{1}{5}(Ln(\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1})) - \dfrac{\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{5}$

Exercice n° 5

1. Trouver deux nombres réels A et B tels que la relation : $4n^3 = An^2(n+1)^2 + Bn^2(n-1)^2$ soit vérifiée pour tout entier n.

Par identification des polynômes, on obtient : A=1 et B=-1 (en particulier ; $A+B=0$).

2. Déduire de la relation précédente la somme S_n des cubes des n premiers nombres entiers.

On écrit la relation précédente pour *n*, *n-1*, *n-2*,…*2*, *1*, puis on somme les égalités obtenues, d'où $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. Montrer que l'on peut obtenir la somme S_n directement par récurrence.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^3}{4}$$

4. On pose $u_n = \dfrac{s_n}{S_n}$, où s_n désigne la somme des n premiers nombres entiers. Calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$. On a : $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{-2}{n+1} + \dfrac{2}{n}$.

On en déduit par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Exercice n° 6

Soient X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 / \exists(u_n), \exists(\lambda_n) > 0,\ \lim_{n\to\infty} u_n = a,\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n(u_n - a) = u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

On vérifie aisément que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$, en posant $\lambda_n = n$ et $u_n = a$.

2. Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

a) $X = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ et $a = (1,0)$

Soit $u \in T(X,a)$, il existe une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n(u_n - a) \to u$. En particulier, $\lambda_n(x_n - 1) \to x$, $\lambda_n(y_n) \to y$, $x_n \to 1$, $(y_n) \to 0$.

Comme $(u_n) \in X$, $\lambda_n x_n^2 + \lambda_n y_n^2 = \lambda_n$ ou encore $\lambda_n (x_n - 1)(x_n + 1) + \lambda_n y_n y_n = 0$ et par passage à la limite, on obtient $x = 0$. On vérifie la réciproque pour obtenir :

$$T(X,a) = \{(x,y) / x = 0\}$$

b) $X = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$ et $a = (1,0)$

Le raisonnement est identique au cas précédent pour obtenir :

$$T(X,a) = \{(x,y) / x \le 0\}$$

c) $X = \{(x,y) \in R^2 / x \ge 0, -x^2 \le y \le x^2\}$ et $a = (0,0)$

Soit $u \in T(X,a)$, il existe une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n(u_n - a) \to u$. En particulier, $\lambda_n(x_n) \to x$, $\lambda_n(y_n) \to y$, $x_n \to 0$, $(y_n) \to 0$.

Comme $(u_n) \in X$, $-\lambda_n x_n^2 \le \lambda_n y \le \lambda_n x_n^2$ et comme $(u_n) \in X$, $x_n \ge 0$

La réciproque est évidente en posant $x_n = \frac{x}{n}, y_n = 0, \lambda_n = n$ pour obtenir la demi-droite :

$$T(X,a) = \{(x,y) / x \ge 0, y = 0\}$$

Exercice n° 7

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B, deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans l'urne A et un jeton dans B que l'on échange en les plaçant dans B et A (étape1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après *n* échanges.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

Les valeurs possibles de X_n sont 0, 1 et 2.

2. Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1}=k$ sachant que $X_n=i$.

Etat n	Etat $n+1$	Probabilité
(0,0)	(0,1)	1
(1,1)	(0,1)	1
(0,1)	(0,0)	¼
(0,1)	(0,1)	½
(0,1)	(1,1)	¼

3. On pose $a_n = P(X_n=0)$, $b_n = P(X_n=1)$, $c_n = P(X_n=2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où P désigne la probabilité. Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1}=TV_n$

$$a_{n+1} = P(X_{n+1}=0) = \frac{1}{4}b_n$$

$$c_{n+1} = P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4}b_n \text{ et}$$

$$b_{n+1} = P(X_{n+1}=1) = a_n + c_n + \frac{1}{2}b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ d'où } T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Etudier la suite vectorielle (V_n). Déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Du système précédent, on peut en déduire que si toutes les suites convergent, alors $\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = 4\underset{n}{Lim}\, b_n$

La matrice T admet pour valeurs propres : 1, 0 et -1/2. Comme ces valeurs sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par (1, 4, 1).

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par (1, 0,-1).

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est engendré par (1,-2,1).

On obtient $T^n = P\Delta^n P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis $V_{n+1} = T^n V_1 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1/2^n \\ 4-1/2^{n-1} \\ 1+1/2^n \end{pmatrix}$

En conclusion :

$\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = \dfrac{1}{6}$ et $\underset{n}{Lim}\, b_n = \dfrac{2}{3}$

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

Soit la matrice C_n définie par

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

où les complexes $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(b_j)_{j=1,\ldots,n}$ sont tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et j variant entre 1 et n.
On notera pour tout ce qui suit : $l_1, \ldots, l_n$ les numéros de lignes 1 à n, et $c_1, \ldots, c_n$ les numéros de colonnes 1 à n.

1.
$$C_1 = \left(\frac{1}{a_1+b_1}\right).$$

2.
$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{pmatrix}.$$

3. $det(C_1) = \frac{1}{a_1+b_1}$

4.
$$\begin{aligned} det(C_2) &= \frac{1}{a_1+b_1}\frac{1}{a_2+b_2} - \frac{1}{a_1+b_2}\frac{1}{a_2+b_1} \\ &= \frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1)-(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{-a_1(b_2-b_1)+a_2(b_2-b_1)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{\prod_{i<j=1,2}(b_j-b_i)(a_j-a_i)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
det(C_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{a_2+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_2+b_2}{a_1+b_2} \\ \\ \frac{a_2+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_2+b_2}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \text{ étape (a)} \\
&= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{a_2-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_2-a_1}{a_1+b_2} \\ \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ étape (b)} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{b_2-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ étape (c)} \\
&= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq 2}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)}.
\end{aligned}
$$

Etape (d) . On retrouve bien le déterminant calculé en 4).

6. On retrouve tout très précisément, mais on doit compléter à la fin avec un récurrence sur le $det(C_n)$, puisqu'on obtiendra

$$det(C_n) = \frac{\prod_{i,j=1,\ldots,(n-1)}(a_n-a_i)(b_n-b_j)}{\prod_{j=1,\ldots,n;i=1,\cdots,n-1}(a_n+b_j)(a_i+b_n)} det(C_{n-1}).$$

Problème

A. Préliminaires :

1. Il suffit d'intégrer f entre t et $+\infty$. On obtient $S(t) = \exp(-\frac{t}{\sigma})\mathbb{1}(t)_{]0;+\infty[}$.
2. En dérivant par rapport à t de part et d'autre du signe égal, on a $f(t) = -S'(t)$. Ainsi
   (a) Pour $\gamma \neq 0$, on obtient
   $$f(t) = \frac{1}{\sigma}\left(1+\frac{\gamma}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}.$$
   (b) Dans le cas $\gamma = 0$, on calcule $lim_{\gamma\to 0}S(t) = \exp(-\frac{t}{\sigma})\mathbb{1}(t)]0;+\infty[$ qui est la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre σ.
3. On remarque alors que
   $$\lim_{q\to 1} H_q(x) = -\int f(x)ln(f(x))dx = H(x).$$
   L'entropie de Shannon n'est que le cas limite $q = 1$ de l'entropie de Rényi-Tsallis.

B. Maximisation sous contraintes

1.

$$\begin{aligned} B(f,g) &= \int d_F(f,g) \\ &= \int -f(x)^q + g(x)^q + qg(x)^{q-1}(f(x)-g(x))dx \end{aligned}$$

2. (a) Comme G^* et G vérifient (1), on a

$$B(G,G^*) = -\int (G(x)^q - G^*(x)^q)dx - \alpha \int (G(x)G^*(x)^{q-1} - G^*(x)^q)dx$$

(b) Grâce à la définition de G^* et au fait que G vérifie (1), on a

$$\int G(x)G^*(x)^{q-1}dx = \int G^*(x)^q dx.$$

(c) Ainsi on obtient

$$B(G,G^*) = -\int (G(x)^q - G^*(x)^q)dx.$$

Et B positive ou nulle entraîne $G = G^*$ de manière évidente. La réciproque est elle aussi triviale.

(d) Comme $B(G,G^*) \geq 0$ on a $H_q(G^*) \geq H_q(G)$ puisque $H_q(G^*) = \frac{1}{1-q}\left(\int (G^*)^q - 1\right)$.

(e) Ainsi, G^* est le maximum de l'entropie de Rényi-Tsallis avec $0 < q < 1$ dans l'ensemble des fonctions vérifiant les contraintes de (1).

(f) On trouve $G^*(x) = \alpha \exp(-\beta x)$ avec α et β tels que

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta^2}, \theta = \frac{\alpha}{\beta}.$$

et l'entropie de Shannon est

$$H_1(f) = -\frac{\alpha}{\beta}\log(\alpha) + \alpha.$$