DEVOIR N°1-1 DU 2nd SEMESTRE :
DUREE : 4H

Exercice 1 :

Dans cet exercice on cherche à calculer l'intégrale : $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin(2x) + e^{-x} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right] dx$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$ (E).

2. On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ (E')

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par :

$\forall x \in IR\ f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ soit solution de (E').

b. f désignant une fonction numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.

Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E).

c. En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E').

3. a. Vérifier que la solution de (E') telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $f'(0) = 2$ est

$f(x) = \sin(2x) + e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b. Utiliser (E') pour trouver l'ensemble des primitives F de f **.**

c. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 :

Tous les points considérés dans cet exercice appartiennent à un plan euclidien **P.**
Soient **(D)** une droite de **P**, O un point de **(D)** et **(C)** un cercle de centre O. **(C)** coupe **(D)** en A et B.
Soient H le milieu de $[OB]$ et I le point de **(C)** tel que $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HI}) = \frac{\pi}{2}$.
Soient enfin K et J les symétriques de H et I par rapport au point O.

1. Montrer que les triangles KAJ et HIA sont directement semblables (on pourra utiliser le triangle HBI).

2. Soit S la similitude directe transformant K, A, J en H, I, A respectivement. Déterminer son angle α et son rapport K.

3. Prouver que les trois cercles de diamètre $[KH]$, $[AI]$ *et* $[JA]$ respectivement passent par le centre Ω de la similitude S.

4. Déterminer l'image du point O par la similitude S.

Exercice 3 :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB = 1$. On note M le projeté orthogonal de O sur $[AB]$.

On se propose de déterminer le lieu géométrique C de M lorsque A et B se déplacent, chacun sur son axe.

1. On note (x, y) les coordonnées de M et t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, -\vec{i})$.

Montrer que C est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x = f(t) = \sin^2 t \cos t \\ y = g(t) = \cos^2 t \sin t \end{cases} \quad t \in IR$$

2. Pour tout réel t, comparer la position des points

$M(t+2\pi)$ *et* $M(t)$ *puis* $M(-t)$ *et* $M(t)$ *puis* $M(\pi - t)$ *et* $M(t)$ *et enfin* $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ *et* $M(t)$

En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et de construire la partie de courbe C correspondante.

Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe.

3. Etudier les variations des fonctions f et g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Tracer la courbe C en précisant les points où la tangente est parallèle à l'un des axes, ainsi que les tangentes à l'origine.

Problème :

A. 1. Soit f définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a. Etudier les variations de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

b. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 5 cm).

2. Calculer en cm^2 l'aire de domaine plan Δ compris entre la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $g(x) = f(\sin x)$

Montrer que la fonction g est une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h telle que $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

B. Dans tout la suite du problème a désigne un réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Et pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t}\, dt$.

1. Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a)$.

2. Pour tout entier n, supérieur ou égal à 1, on pose pour tout :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \ldots\ldots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

a. Montrer que F_n est dérivable sur l'intervalle $[0, a]$ et $\forall\, t \in [0; a]$

$$F'_n(t) = \frac{1-\sin^{2n} t}{\cos t} \quad (1)$$

b. Calculer $F_n(0)$

3. En intégrant (1) montrer que $F_n(a) = g(a) - I_n(a)$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a)$

4. On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$

a. Montrer que (U_n) converge vers une limite que l'on précisera.

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, U_n est une valeur approchée de $\ln\sqrt{3}$ à $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ près.

c. En déduire sous forme d'une fraction une valeur approchée de $\ln\sqrt{3}$ à 10^{-2} près par défaut.