

IA THIES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

LANS

Durée : 4H

2017/2018

Exercice 1 (2 points)Soit l'équation (E) : $z^4 = 28 - 96i$

- 1) Résoudre l'équation $z^4 = 1$ (0.75 pt)
- 2) Montrer que $z_0 = 3 - i$ est une solution de (E). (0.5 pt)
- 3) Dédire des questions précédentes la résolution de est une solution de (E) (0.75 pt)

Exercice 2 (6 points)I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 2z^3 - (1 + 5i)z^2 - 2(2 - 3i)z + 3 - i$

- 1) Montrer que $P(z)$ admet une solution réelle à déterminer. (0.5 pt)
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ (1pt)

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$.I désigne le point d'affixe 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et Ω son centre.

- 1) On considère le point A_0 d'affixe $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Prouver que A_0 appartient à $\mathcal{C}$. (0.5 pt)
- 2) B est le point d'affixe respective $b = -1 + 2i$ et B' celui d'affixe $b' = a_0 b$
Prouver que le triangle OBB' est rectangle en B' (0.75 pt)
- 3) Soit a un nombre complexe ($a \neq 0, a \neq 1$) et A le point d'affixe a . Pour tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az$
 - a) On pose $Z = \frac{z' - z}{z'}$. Prouver que $(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (0.5pt)
 - b) Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$ (0.5pt)
 - c) Dédisez en que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle privé de O et I (0.75 pt)

5) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+1-2i}{z-1}$ Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un réel strictement positif. (1+0.5p)

PROBLEME (12 points)

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unité 2cm

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$

- 1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$ (0.25+0.25pt)
 - 2) Etudier le sens de variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$ (0.5pt)
 - 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$ (0.5pt)
 - 4) Vérifier l'encadrement $1,86 \leq \alpha \leq 1,87$. (0.25pt)
- Préciser le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$ (0.25pt)

Partie B : Etude de la fonction f

- 1) a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$ (0.5+0.5pt)
 - b) Déterminer la dérivée f' de f . Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ (0.75+0.25pt)
 - c) Déterminer le sens de variation de f (0.5pt)
 - 2) a) Montrer que la droite $(d): y = -\frac{1}{2}x + 3$ est une asymptote à la courbe de C . (0.5pt)
 - b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe C avec la droite (d) (1pt)
 - c) Etudier la position de C par rapport à (d) (1pt)
 - 3) Calculer $\ln(e\sqrt{e})$. (0.25pt)
- Déterminer les coordonnées du point B de la courbe C où la tangente T est parallèle à la droite (d) (1pt)
- 4) Construire (d) , T et C dans le repère donné. (1+0.5pt)

Partie C : Calcul d'une primitive

- 1) Soit $h: x \mapsto \frac{2\ln x}{x}$ et $u: x \mapsto \ln x$ pour $x > 0$
 Exprimer h en fonction de u et u' (0.75pt)
 En déduire une primitive de h sur $]0; +\infty[$ (0.5pt)
- 2) Déterminer une primitive F de f sur $]0; +\infty[$ (1pt)