SERIE N°3 : TRIGONOMETRIE-PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$a)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\; b)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$c)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\frac{\pi}{8}\; d)\sin 2x=\frac{1}{2}$

Exercice 2 :

Résoudre sur l'intervalle $I=\left]-\pi;\pi\right]$

$a)\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\; b)\cos 4x=0$

$c)\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\; d)\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$e)\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\; f)\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 3 :

Résoudre dans l'intervalle I , les équations suivantes :

$a)I=IR\; et\; l'équation:$

$\sin^2 x-\sin x-6=0$

$b)I=\left[0;2\pi\right[\; et\; l'équation:$

$2\cos^2-3\cos x-2=0$

$c)I=\left]-\pi;\pi\right]\; et\; l'équation:$

$4\cos^2 x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0$

Exercice 4 :

On considère l'équation :

$\sin 3x=-\sin 2x\,(1)$

1° Résoudre cette équation dans IR, puis dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2° a) Démontrer que $\sin x\left(4\cos^2 x-1\right)$

b) En déduire que l'équation (1) est équivalente à : $\sin x\left(4\cos^2 x+2\cos x-1\right)=0$

c) Parmi les solutions trouvées pour (1) ,lesquelles sont aussi solution de l'équation : $4\cos^2 x+2\cos x-1=0$?

Exercice 5 :

Résoudre dans D les inéquations trigonométriques suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

$a)\cos x\prec-\frac{\sqrt{2}}{2}\; D=IR$

$b)\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1\leq 0\; D=\left[0;2\pi\right[$

$c)\sin x-\cos x\leq\sqrt{\frac{3}{2}}\; D=IR$

Exercice 6 :

Résoudre dans D les systèmes d'inéquations trigonométriques suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

$a)\begin{cases}\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2\sin x+1\geq 0\end{cases}\; D=\left[0:2\pi\right[\; b)\begin{cases}\sin x\prec\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x\geq-\frac{1}{2}\end{cases}\; D=IR$

$c)\begin{cases}\sin 2x\prec\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos 2x\geq-\frac{1}{2}\end{cases}\; D=IR$

Exercice 7 :

Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

$a)\frac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}}\geq 0; D=\left]-\pi:\pi\right]$

$b)\frac{2\cos 2x-1}{1+2cox2x}\prec 0;\; D=\left[0;2\pi\right[$

$c)2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x\geq 0;\; D=\left[0;2\pi\right[$

$d)4\sin^2 x+2\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x-\sqrt{2}\leq 0;\quad D=\left[0;2\pi\right[$

$e)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geq 0; D=IR\; f)\left|\tan x\right|\geq 1; D=IR$

Exercice 8 :

1) On donne

$\left\|\vec{u}\right\| = 3, \left\|\vec{v}\right\| = 2 \, et \, l'angle\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{7\pi}{4}$

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

2) On donne $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et $\left\|\vec{u}\right\| = 4$

Calculer $\left\|\vec{v}\right\|$

3) On donne

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3} \, et \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{4}{3}$. Calculer

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 9 :

1) On donne $\left\|\vec{u}\right\| = 2, \left\|\vec{v}\right\| = 3 \, et \, \vec{u}\cdot\vec{v} = 1$

Calculer

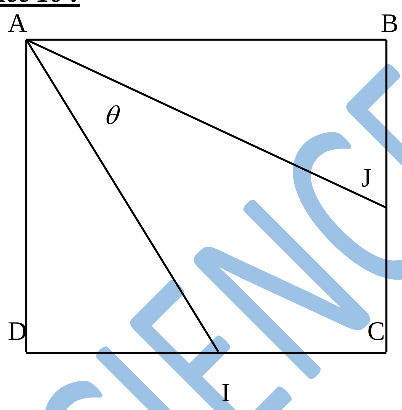
$a)\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right) b)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)$

$c)\left(-3\vec{u}+\vec{v}\right)^2$

2) Sachant que $\left\|\vec{u}\right\| = 1, \left\|\vec{v}\right\| = 2 \, et \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| = 3$

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v} \, et \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$

Exercice 10 :



–

Soit un carré ABCD de côté a, I le milieu de [BC] et J celui de [DC].
On se propose dévaluer l'angle IAB de mesure θ.

1° Exprimer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ en fonction de cos θ et de a.

2°a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Donner une autre expression de $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

3° Déduire des questions précédentes :

a) La valeur de cos θ.

b) La valeur approchée, à 10^{-2} prés par défaut, de θ (en degrés)

Exercice 11 :

1° En utilisant deux écriture de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, justifier que les propriétés

□ $AB^2 = BH\cdot BC$ □ et □ ABC est rectangle en A □ sont équivalentes.

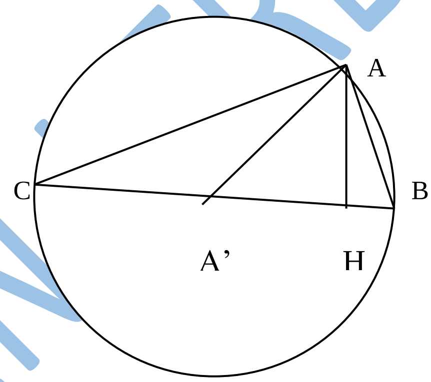
2° Démontrer qu'il est équivalent d'écrire :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \, et \, AH^2 = -\overline{HB}\times\overline{HC}$.

3° En donnant deux écritures de l'aire du triangle ABC, montrer que (6) et (1) sont équivalentes.

4° Déduire des égalités (2) et (6) que si ABC est un triangle rectangle en A de hauteur [AH], alors on a l'égalité : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Relation métrique dans un triangle rectangle



Il équivaut d'écrire : (1) ABC est rectangle en A ;

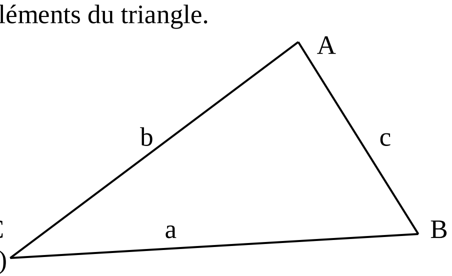
$(2) AB^2 + AC^2 = BC^2 ; (3) AA' = \frac{1}{2}BC$

$(4) AB^2 = \overline{BH}\times\overline{BC} ; (5) AH^2 = -\overline{HB}\times\overline{HC}$

$(6) AB\times AC = AH\times BC$

Exercice 12 :

Soit ABC un triangle. Connaissant certaines indications sur le triangle, déterminer d'autres éléments du triangle.



a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{6}, \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{6} \, et \, a = 1 ; calculer \, b$

b) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2\pi}{3}, b = 1 \, et \, c = 2 ; calculer \, a$