AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

1 Premier problème :

1. La fonction F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car F est clairement définie en 0 puisque c'est la somme d'une série entière et pour tout x non nul,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{(n+1)^2} = 0$$

donc la série converge par la règle de d'Alembert.

F est paire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2}\ , \qquad F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1)x^{2n-2}}{(n!)^2}\ .$$

Pour tout $x \geq 0$, $F'(x) > 0$ donc F est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F''(x) > 0$ donc F est convexe.

2. (a) On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{2n+2}{2n+1} > 1$. Donc la suite (v_n) est croissante et $v_n \geq v_0 = 1$, d'où $\dfrac{1}{(n!)^2} \leq \dfrac{4^n}{(2n)!}$.
Par la définition de F en déduit de cette inégalité, que pour $x \geq 0$:

$$F(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(2x).$$

(b) Considérons maintenant la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et appliquons le même raisonnement que la question précédente. On a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{2n+2}{2n+3} < 1$. Donc la suite (w_n) est décroissante et $w_n \leq w_0 = 1$, d'où $\dfrac{1}{(n!)^2} \geq \dfrac{4^n}{(2n+1)!}$.
On obtient, pour $x > 0$:

$$F(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x}.$$

(c) On a $G(x)=\sqrt{\mathrm{ch}(2x)\frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x}}=\sqrt{\frac{\mathrm{sh}(4x)}{4x}}$ et on écrit

$$G(x)=\sqrt{\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{8x}}=\frac{e^{2x}}{2\sqrt{2x}}\sqrt{1-e^{-8x}},$$

d'où $G(x)\sim\frac{\Phi(x)}{2\sqrt{2}}$ au voisinage de $+\infty$.

3. (a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $t\mapsto t^ke^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de la forme $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ qd $t\to+\infty$ donc est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $A>0$ et $k\in\mathbb{N}$, posons $I_k(A)=\int_0^A t^ke^{-xt}dt$.

Pour $k=0$, $I_0=\lim\limits_{A\mapsto+\infty}I_0(A)=\lim\limits_{A\mapsto+\infty}\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A=\frac{1}{x}$ car $x>0$. Pour $k>0$, on obtient en intégrant par parties, $I_k(A)=\left[t^k\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A+\frac{k}{x}I_{k-1}(A)$. On en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que $I_k=\frac{k}{x}I_{k-1}$. Une récurrence simple donne

$$I_k=\frac{k!}{x^{k+1}}.$$

(b) Montrons d'abord que l'intégrale existe. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc $t\mapsto F(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$. D'après la question 2, $\forall t\geq 0$, $0\leq F(t)e^{-xt}\leq \mathrm{ch}(2t)e^{-xt}$ et lorsque $t\to+\infty$, $\mathrm{ch}(2t)e^{-xt}\sim\frac{1}{2}e^{(2-x)t}$.
Si $x>2$, $t\mapsto\frac{1}{2}e^{(2-x)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $t\mapsto\mathrm{ch}(2t)e^{-xt}$ aussi, d'après le théorème des équivalents, enfin$t\mapsto F(t)e^{-xt}$ est aussi intégrable d'après le théorème de comparaison.

Pour tout $x>2$, $L(F)(x)=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}\right)e^{-xt}dt$. Posons $X_n(t)=\frac{t^{2n}}{(n!)^2}e^{-xt}$.
La série de fonctions $\sum X_n(t)$ converge sur $[0,+\infty[$ et sa somme $F(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Il est clair que pour tout n, X_n est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$.
Pour tout n, posons $J_n=\int_0^{+\infty}|X_n(t)|\,dt$ et montrons que la série de terme général J_n est convergente. On a $J_n=\int_0^{+\infty}X_n(t)dt=\frac{1}{(n!)^2}I_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2x^{2n+1}}$. Utilisons le critère de d'Alembert : on a $\frac{J_{n+1}}{J_n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2x^2}$ qui tend vers $\frac{4}{x^2}$ quand n tend vers $+\infty$, or $x>2$ implique $\frac{4}{x^2}<1$, donc $\sum\int_0^{+\infty}|X_n|\,(t)dt$ converge.
On peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Donc

$$L(F)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}X_n(t)dt$$

et en conclusion

$$L(F)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2x^{2n+1}}\,,\quad\text{pour tout } x>2\,.$$

(c) Pour $t > 0$ posons $g_n = g_n(t) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}$. On a $\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{2(2n+1)t^2}{(n+1)}$ qui tend vers $4t^2$ lorsque n tend vers ∞. La règle de d'Alembert entraine que la série $\sum g_n$ converge pour $4t^2 < 1$ et diverge pour $4t^2 > 1$; son rayon de convergence R est donc égal à $1/2$.

Pour $|u| < 1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+u}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)...(-1/2-n+1)}{n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2^n n!} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} u^n \ .\end{aligned}$$

En posant $u = -4t^2$ pour $|t| < 1/4$ on a bien $|u| < 1$ et on obtient $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$ pour $|t| < \frac{1}{4}$.

(d) Pour tout $x > 2$,

$$L(F)(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n} = \frac{1}{x} g(\frac{1}{x}) \ ,$$

d'où

$$L(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \ .$$

(e) $t \mapsto \Phi(t)e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{(2-x)t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, équivalent à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 donc intégrable sur $]0, 1]$. Au voisinage de $+\infty$: si $2-x < 0$ alors $\Phi(t)e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $[1, +\infty[$; si $2-x \geq 0$ alors $\Phi(t)e^{-xt} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $L(\Phi)$ est définie sur $]2, +\infty[$.

On fait le changement de variable $u = \sqrt{t(x-2)}$ et on obtient

$$L(\Phi)(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-2}} \ .$$

Deuxième probléme

2 Partie I :

1. Comme φ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h\varphi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)dt$. Posons $u_n = h\varphi(nh)$ et $v_n = \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)dt$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n u_i \leq \sum_{i=1}^n v_i = \int_0^{nh} \varphi(t)dt$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt < \infty$, on déduit la convergence de la série $\sum u_n$ par domination, car $u_n \geq 0$ pour tout n,.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = \sum_{i=1}^n u_i$, $V_n = \sum_{i=1}^n v_i$. Par la décroissance de φ, on a $v_{i+1} \leq u_i \leq v_i$ et, en sommant ces inégalités, on a

$$V_{n+1} - v_1 \leq U_n \leq V_n$$

ce qui donne par passage à la limite, quand $n \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt - \int_0^h \varphi(t)dt \leq \sum_{i=1}^{+\infty} h\varphi(ih) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

Vu que $\lim_{h\to 0} \int_0^h \varphi(t)dt = 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

2. (a) Par la décroissance de φ, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} 0 \leq C &= \int_0^1 \varphi(t)dt + \lim_{n\to+\infty} \Big\{ \sum_{k=2}^n \big(\int_{k-1}^k \varphi(t)dt - \varphi(k-1)\big) - \varphi(n)\Big\} \\ &\leq \int_0^1 \varphi(t)dt - \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) \ . \end{aligned}$$

De plus, la suite réelle $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc elle est convergente. D'où l'existence de C.

(b) Considérons tout d'abord le cas $x < 1$: on a

$$\psi(x) = -\int_0^x \varphi(t)dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t)dt - \varphi(k) \right]$$

et donc, grâce à la question précédente, $\psi(x) \leq -\int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 \varphi(t)dt$. Comme $\varphi(x) > 0$ on a

$$\psi(x) \leq \int_x^1 \varphi(t)dt \leq (1-x)\varphi(x) \leq \varphi(x) \ .$$

Il nous faut maintenant l'inégalité $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geq -1$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 \varphi(t)dt - \varphi(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t)dt - \varphi(k) \right] \\ &\geq \int_x^1 \varphi(t)dt - \varphi(1) \geq -\varphi(1) \\ &\geq -\varphi(x) \ , \end{aligned}$$

car φ est décroissante. Pour traiter le cas $x \geq 1$, on écrit, après transformation,

$$\psi(x) = -\int_{E(x)}^{x} \varphi(t)dt + \sum_{k=E(x)+1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k)\right]$$

puis on applique des inégalités semblables a celles du cas précédent :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq -\int_{E(x)}^{x} \varphi(t)dt + \int_{E(x)}^{E(x)+1} \varphi(t)dt \\ &= \int_{x}^{E(x)+1} \varphi(t)dt \\ &\leq \varphi(x)\big(E(x)+1-x\big) \ \leq \varphi(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\int_{E(x)}^{x} \varphi(t)dt + \int_{E(x)}^{E(x)+1} \varphi(t)dt - \varphi(E(x)+1) \\ &\qquad + \sum_{k=E(x)+2}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k)\right] \\ &\geq \int_{x}^{E(x)+1} \varphi(t)dt - \varphi(E(x)+1) \geq -\varphi(E(x)+1) \\ &\geq -\varphi(x) \qquad \text{car } \varphi \text{ est décroissante .} \end{aligned}$$

3. Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

   Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$, on a pour $0 < x < 1$,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

   donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

4. On pose $h = -\ln x$ et on considère la fonction $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nh} = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh).$$

   On utilise le I1° appliqué à la fonction φ qui est continue sur $]0, +\infty[$, décroissante, positive et vérifie $\int_0^{\infty} \varphi(t)dt < \infty$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) \sim \frac{I}{\sqrt{h}}$$

   où $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

En conclusion, comme $h=-\ln x \sim 1-x$ en 1, on a bien

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

5. Pour $y \geq 1$, on a $s(y)=\sum_{n=1}^{E(y)} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = A_{E(y)}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h\int_n^{n+1} s(y)e^{-hy}dy = A_n(e^{-nh}-e^{-(n+1)h})$$

.

D'où pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} h\int_0^n s(y)e^{-hy}dy &= h\int_1^n s(y)e^{-hy}dy \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(e^{-kh}-e^{-(k+1)h}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{-kh} - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1}e^{-kh} \\ &= -A_n e^{-nh} + A_1 e^{-h} + \sum_{k=2}^{n} [A_k - A_{k-1}]e^{-kh} \\ &= -A_n e^{-nh} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kh}. \end{aligned}$$

Comme $A_n e^{-nh}$ a une limite nulle en $+\infty$ (car $A_n \leq n$), $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n s(y)e^{-hy}dy$ existe. On peut donc prendre la limite dans l'égalité du dessus, on en déduit que $f(x) = h\int_0^{+\infty} s(y)e^{-hy}dy$.

6. (a) On considère la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Avec les notations du I.2. on a $\psi(x) = s(x) - 2\sqrt{x} + C$, où $C = \lim\limits_{n\to\infty} \big(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\big)$ et par la question 1.2.(b),

$$|\psi(x)| = |s(x) - 2\sqrt{x} + C| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc

$$\left|\int_0^{+\infty} h\psi(t)e^{-ht}dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{t}}e^{-ht}dt = \sqrt{h}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \sqrt{\pi}\sqrt{h}$$

et d'après le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} f(e^{-h}) &= h\int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ht}dt + 2h\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-ht}dt - Ch\int_0^{+\infty} e^{-ht}dt \\ &= h\int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ht}dt + \frac{\sqrt{\pi}}{h} - C\ , \end{aligned}$$

car $2h\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-ht}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{h}$ et $h\int_0^{+\infty}e^{-ht}dt = 1$. Il vient ainsi:

$$\left|f(e^{-h}) - \frac{\sqrt{\pi}}{h} + C\right| \leq \sqrt{\pi h}.$$

Or, par un calcul simple, on prouve que

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} = -C$$

où

$$C = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\ .$$

(b) $f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est bien définie comme somme d'une série alternée. On pose alors:

$$B_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}},\ \ A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On sépare dans chacune de ces deux sommes les termes pairs et impairs, ce qui s'écrit:

$$\begin{aligned} B_{2n} &= -\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \\ A_{2n} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$B_{2n} + A_{2n} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2}A_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = A_n - 2\sqrt{n} + C$. On a $A_n = 2\sqrt{n} - C + x_n$ et $A_{2n} = 2\sqrt{2n} - C + x_{2n}$ on en déduit que

$$B_{2n} = \sqrt{2}A_n - A_{2n} = (1-\sqrt{2})C + (\sqrt{2}x_n - x_{2n}),$$

en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $f(-1) = (1-\sqrt{2})C$ soit encore $-C = (\sqrt{2}+1)f(-1)$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - M$.

2. On a $M^2 + M - 2I = 0$ et $P(x) = x^2 + x - 2$ répond à la question.

3. M étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour λ valeur propre de M, on a : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, d'où $\lambda = 1$ ou -2. La trace étant invariante par changement de base, on a aussi : $1 - 2 + \lambda = Tr(M) = -3$, d'où $\lambda = -2$. En conclusion, $\lambda = 1$ est une valeur propre simple et $\lambda = -2$ une valeur propre double.

4. Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est nécessairement un polynôme du premier degré, c'est-à-dire :

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + (aX + b)$$

Pour $X = 1$, on obtient $1 = a + b$ et pour $X = -2$, $(-2)^n = -2a + b$. La résolution du système donne :

$$a = \frac{1-(-2)^n}{3} \text{ et } b = \frac{2+(-2)^n}{3}$$

5. $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + (aM + bI)$ et comme $M^2 + M - 2I = 0$, on obtient $M^n = aM + bI$ ou encore,

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

6. On obtient $U_{n+1} = M^n U_1 = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ b+a \\ b+a \end{pmatrix}$, d'où

$x_{n+1} = y_{n+1} = z_{n+1} = 1$

Exercice n° 2

1. On vérifie aisément que l'on a une norme, en effet,

(1) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \underset{x \neq 0}{Sup}\|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x$ (car $f(0) = 0$).

(2) $\forall \lambda \in R,\ \|\lambda f\| = |\lambda| \times \|f\|$

(3) $\forall f, g \in L(E),\ \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|,\ \ \forall x \in E$, d'où $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

2. Si $I - (P-Q)$ n'est pas inversible, alors
$\exists u \neq 0,\ (I-(P-Q))(u) = 0$, d'où $u = (P-Q)(u)$ et $\|u\| = \|(P-Q)u\| \leq \|P-Q\| \times \|u\| < \|u\|$,
ce qui est impossible.

Comme $I - (P-Q)$ est inversible, il existe un endomorphisme v de E tel que : $(I-(P-Q))v = I$, d'où $P(I-(P-Q))v = P$ ou encore $(P - P^2 + PQ)v = P$ et $PQv = P$ car $P^2 = P$. Pour tout x de E, on a $P(x) = PQ(v(x))$, à savoir $P(E) = PQ(E)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(P)$, alors $y = P(x) = PQ(v(x))$ et $t = Q(v(x)) \in \mathrm{Im}Q$ vérifie $y = P(t)$. P est donc une application bijective.

P étant un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Im}(Q)$, les dimensions sont égales.

Exercice n° 3

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

1. Pour $n = 2$, $r_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} = u_1 + \frac{u_2}{2}$. La relation est donc vérifiée.

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n(n+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1}$$

2. $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$

La première série est convergente et le deuxième terme tend vers zéro par hypothèse.

La suite (r_n) a donc une limite finie et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

3. Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Pour n grand, $|s_n| \le l$ et $\left|\frac{s_n}{n(n+1)}\right| \le \frac{l}{n(n+1)}$, donc l'hypothèse 2a) est vérifiée. De plus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est convergente d'après la question précédente.

4. On vérifie que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ est convergente.

5. On considère la suite (s_n) définie par :

$s_n = \begin{cases} 2k & si \quad n = 2k \\ -(2k+1) & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$. Elle vérifie les relations demandées.

En effet :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{E(n+1/2)-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{1}{2}$$

(série convergente) et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}$ n'existe pas.

Exercice n° 4

1. On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

2. Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$.

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1) + 1}{x^2} = \frac{u(x^2)}{x^2}$.

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur R^{+*}.

La fonction f est strictement croissante et continue sur R, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

3. $e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + ... + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On prolonge ε en 0 par $\varepsilon(0) = 0$.

4. $f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$

Pour f^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ et

$f^{-1} o\, f(x) = x \Rightarrow a_1 (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3 (x^3 + 3\frac{x^5}{2}) + a_5 x^5 + o(x^5) = x$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3} a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{7}{12} x^5 + o(x^5)$.

Problème :

1. Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h, on a $p \circ p = p$ et $h = \lambda Id$. On obtient $f(x) = p \circ h(x) = \lambda p(x)$. On pose donc $p(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ et $h(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On vérifie que $f \circ f = \lambda f$.

2. Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap Ker\, f$. On obtient : $f(y) = 0$ et $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$, d'où $f(y) = f^2(x) = 0 = \lambda f(x)$ et $y = f(x) = 0$

3. Soient $f, g \in L_\lambda$. $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f+g)\circ(f+g) = \lambda(f+g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f+g) \in L_\lambda$.

Réciproquement, on a :

$f \circ g + g \circ f = 0$ (1)

On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2) ;

La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

4. $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g) \circ (f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f)$, donc $\mu = \lambda_1 \lambda_2$.

5. $v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aId) \circ (u - aId) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 Id = \lambda(u - aId)$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abId = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abId$. On trouve donc $\lambda = b - a$.

De même $w \circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aId) + \beta(u - bId)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v \circ w = w \circ v = 0$.

D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

6. Le polynôme caractéristique de A est

$(\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$A^2 - A - 2I = (A + I)(A - 2I)$$

On obtient, par exemple, $a = -1$ et $b = 2$.

$$A^n = \frac{2^n}{3}(A + I) - \frac{(-1)^n}{3}(A - 2I) = \frac{(2^n + (-1)^n)}{3} A + \frac{(2^n + 2(-1)^n)}{3} I$$