

Exercice 1 :

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (unité graphique 1cm) la suite de point $M_n(z_n)$ telle que $z_0 = 5 + 4i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n + 1 - \frac{1}{2}i$ $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Représenter les points $M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3$ et M_4 .
b. Quelle est la nature de la transformation plane qui à M_n fait correspondre M_{n+1} ?
Préciser ses éléments caractéristiques.
2. On pose $Z_n = z_n - z_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$, $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $d_n = M_{n-1}M_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$
 - a. Dédire de 2) la nature de la suite (d_n) . Exprimer alors d_n et L_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $L_n > 12\text{cm}$.
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (I_n) définie par les relations :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt ; I_1 = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt ; I_2 = \int_0^1 t^2 \sqrt{1+t} dt \dots ; I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2
2. Comparer t^n et t^{n+1} lorsque $0 \leq t \leq 1$; en déduire que la suite I_n est décroissante.
3. Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$ établir que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$
4. Montrer que pour tout point t de $[0;1]$, $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et déterminer la limite de nI_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R} / 0 < \alpha < \pi$.

- a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 + \cos^2 \alpha = 0$$

- b. Soient z_1 et z_2 les solutions. Vérifier que $z_1^2 + z_2^2$ est un réel indépendant de α .

- c. Soient M' et M'' les points d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

Déterminer α tel que
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Problème :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 - \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 2 + e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soit φ , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) ($\text{unite} = 2\text{cm}$)

- I) 1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$
- 2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$
- 3) a) Etudier les variations de f
 - b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
 - c) Dresser le tableau de variation de f
- 4) Montrer que φ admet deux asymptotes D et D' d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = -x + 2$
Etudier la position relative de (C_f) et D sur $]1, +\infty[$ et celle de φ et D' sur $]-\infty, 1]$
- 5) Construire (C_f) . On placera D, D' , les demi tangentes au point d'abscisse -1

et la tangente au point d'abscisse 0

II) Soit g la restriction de f à $]-\infty, 1]$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que (C_g) coupe $\Delta : y = x$ en un point M_0 d'abscisse x_0 de l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right]$,
(on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$)
- 2) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle J à préciser.
- 3) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(g^{-1})'(2)$
- 4) Soit (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - a) Donner une équation de la tangente en (Γ) au point d'abscisse 2
 - b) Tracer (Γ) (on représentera en particulier la tangente obtenue dans la question précédente).