06 T CGS 04 01
Durée : 6 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2006 **CLASSES TERMINALES**

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME 1

$\mathscr{P}$ est un plan euclidien.
Si Γ est un cercle de ce plan de centre Ω et de rayon R, on notera J (Γ), le disque ouvert de centre Ω et de rayon R.

$$J(\Gamma) = \{M \in \mathscr{P} \,/\, \Omega M < R\}.$$

$\mathscr{E}(\Gamma)$, est l'extérieur du cercle Γ.

PARTIE 1 Puissance d'un cercle par apport à un point. (04 points)

Soit Γ un cercle de centre Ω et de rayon R.

1) Soit M un point de $\mathscr{P}$, et soit $\mathscr{D}$ une droite passant par M et coupant Γ en deux points T_1 et T_2.
On pose : $P_{(\mathscr{D},\Gamma)}(M) = \overline{MT_1} \bullet \overline{MT_2}$.

Montrer que $P_{(\mathscr{D},\Gamma)}(M)$ ne dépend pas de la droite $\mathscr{D}$ passant par M et sécante au cercle Γ. **(0,5 pt)**

Dans la suite, on pose : $P_\Gamma(M) = P_{(\mathscr{D},\Gamma)}(M)$; (Cette quantité est la puissance du point M par rapport à Γ).

2) **a)** Etudier le signe de la puissance d'un point M en fonction de sa position dans le plan. **(0,5 pt)**

b) Quelle est la puissance du centre d'un cercle par rapport à ce cercle ? **(0,5 pt)**

3) Soit Γ un cercle et $\mathscr{D}_o$ une droite passant par M et tangente au cercle Γ en un point T.
Quelle est la position du point M par rapport au cercle si une telle droite existe ? $\mathscr{D}_o$ est-elle unique ?

Montrer que $P_\Gamma(M) = MT^2$. **(0,5 pt)**

4) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en deux points A et B. Montrer que la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $P_{\Gamma_1}(M) = P_{\Gamma_2}(M)$. **(01 pt)**

5) Déterminer la nature de l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles lorsque ceux-ci ne sont pas forcément sécants.

Quelle est la situation si les deux cercles sont tangents ? **(0,5 pt)**

6) P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit Γ un cercle dont l'équation cartésienne dans ce repère est : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Déterminer la puissance de O par rapport à Γ. **(0,5 pt)**

CLASSES DE TERMINALES

PARTIE 2 **Construction d'une Π – droite** **(07,5 points)**

Dans cette partie, $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R, et Π est un disque ouvert limité par $\mathscr{C}$, A et B deux points distincts de Π.

1) On suppose que A et B sont situés sur un même diamètre de $\mathscr{C}$. Montrer que dans ce cas, aucun cercle Γ passant par A et B ne rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés. **(01 pt)**

2) On suppose que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre de $\mathscr{C}$ et que OA = OB. Montrer l'existence et l'unicité d'un cercle Γ qui passe par A et B et qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés. **(0,5 pt)**

   Proposer un programme de construction de Γ. **(0,5 pt)**

3) On suppose que OA ≠ OB et que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre de $\mathscr{C}$.
   On suppose qu'il existe un cercle Γ de centre Ω qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2.

   a) Montrer que (A B) rencontre (T_1 T_2) en un point unique S. **(0,5 pt)**

   b) Comparer $P_{\mathscr{C}}(S)$ et $P_{\Gamma}(S)$. **(0,5 pt)**

   c) Soit Γ' un cercle quelconque passant par A et B et rencontrant $\mathscr{C}$ en deux points U_1 et U_2 distincts.
      Comparer la puissance de S par rapport aux cercles $\mathscr{C}$, Γ et Γ' ; en déduire que $S \in (U_1 U_2)$. **(0,5 + 0,5 pt)**

   d) Lorsqu'on ne connaît pas Γ, déduire de ce qui précède une construction géométrique du point S, puis de Γ. **(01,5 pt)**

   e) Justifier que Γ passe par T_2. **(0,5 pt)**

4) Autre démonstration de l'existence de Γ

   On suppose que $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$., et $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R = 1.

   a) Montrer qu' un cercle Γ (distinct de $\mathscr{C}$) rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés si et seulement si $P_{\Gamma}(O) = -1$. **(01 pt)**

   b) En déduire une méthode analytique pour montrer l'existence et l'unicité de Γ en déterminant une équation cartésienne, puis son centre. **(0,25 pt)**
      Comment dans cette méthode reconnaît – on que les coordonnés de A et B sont telles que on est dans le cas particulier étudié à la question 1) ? **(0,25 pt)**

PARTIE 3 **Un lieu géométrique** **(02,5 points)**

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, de rayon R, et A un point distinct de O situé dans le disque ouvert Π limité par $\mathscr{C}$.

1) Soit [To ; T'o] le diamètre de $\mathscr{C}$ perpendiculaire à (O A). Soit Γ_0 le cercle circonscrit au triangle To T'o A, et Ωo son centre. Soit Ω un point de la perpendiculaire Δ à (O A) qui passe par Ωo. Soit [T1, T2] le diamètre de $\mathscr{C}$ perpendiculaire à (Ω O).

   a) Montrer que Ω Ti = Ω A, pour i = 1, 2. **(0,5 pt)**

   b) Soit $\mathscr{L}$ le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par A et qui coupent $\mathscr{C}$ selon deux points diamétralement opposés. Montrer que $\Delta \subset \mathscr{L}$. **(01 pt)**

CLASSES DE TERMINALES

2) Montrer que $\mathscr{L} \subset \Delta$. **(0,5 pt)**

3) En déduire une nouvelle construction géométrique du cercle Γ qui passe par deux points A et B (non situés sur un même diamètre du disque Π et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés). **(0,5 pt)**

PROBLEME N°2 **(05 points)**

L'objet de ce problème est d'étudier la suite U définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et de déterminer sa limite $U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ si elle existe. On rappelle que si x est un réel, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

1) On considère la fonction fn définie par :

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$.

Déterminer $f_n(0)$, puis déterminer l'expression $f_n(x)$ en fonction de $\sin x$ et $\sin(2n+1)x$, pour tout x tel que : $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. **(0,25 + 0,75 pt)**

2) α et β étant deux réels, on considère la fonction h définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\alpha x + \beta x^2}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ h(o) = \alpha. \end{cases}$$

Montrer que h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que h' est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. **(0,5 + 0,5 pt)**

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $H(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) \sin nx \, dx$

Montrer qu'il existe un réel K, ne dépendant pas de n tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $|H(n)| \leq \frac{K}{n}$ **(01 pt)**

4) Soit $J(k, \alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$.

Déterminer un couple de réels (α^*, β^*) tel que : $J(k, \alpha^*, \beta^*) = \frac{1}{4k^2}$. **(0,5 pt)**

On suppose que : $\alpha = \alpha^*$ et $\beta = \beta^*$ pour toute la suite.

5) **a)** Montrer que $U_n = 4\int_0^{2}\left(-x + \frac{x^2}{\pi}\right) f_n(x)\, dx$. **(0,5 pt)**

b) En déduire que Un est convergente et déterminer U. **(01 pt)**

Présentation clarté et précision : **(01 point)**