

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

«*Quoiqu'on ait dépensé apparemment plus de 300 milliards d'aide sur notre continent depuis 1970, le bilan sur le plan économique et humain est à peu près nul.*», Paul Kagamé, 6^e président de la république du Rwanda, discours à la fondation Brenthurst, juillet 2007. Que pensez-vous de ce constat ? Vous illustrerez votre point de vue.

Sujet n° 2

«*Ces religions qui lèsent les femmes sont aussi contre la démocratie, les droits humains et la liberté d'expression.*», Taslima Nasreen, médecin et femme de lettres bangladaise. Qu'en pensez-vous ? Illustrez votre point de vue.

Sujet n° 3

Selon vous, quelle est la place des ONG dans notre société ? Sont-elles complémentaires, en opposition ou en concurrence à l'action gouvernementale ? Vous illustrerez votre réponse.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Préambule : Le sujet est composé de 5 exercices indépendants, que le candidat pourra traiter dans l'ordre de son choix.

Dans l'ensemble du sujet, N désignera l'ensemble des entiers naturels, Z celui des entiers relatifs, R celui des nombres réels, et $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes d'un ensemble E .

Exercice n° 1

Soit $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n et à coefficients dans R .

Soient A, B, C trois matrices de $M_n(R)$ idempotentes (une matrice X est idempotente si et seulement si elle vérifie $X = X^2$).

Montrer que :

$$S = A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C \text{ est idempotente} \Leftrightarrow B = C = 0$$

Indications : on pourra montrer préalablement que les valeurs propres d'un projecteur sont comprises dans l'ensemble $\{0,1\}$, et que sa trace est toujours un entier naturel.

Exercice n° 2

Soit $R^{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients réels.

Soit f l'endomorphisme de $R^{n-1}[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini ainsi :

$$f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Question 1 : Montrer que $f^n(P)$ est le polynôme nul quel que soit le polynôme P .

Question 2 : Montrer que :

$\forall r \in \{0, \dots, n\}, f^r(P)(X) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} P(X+k)$, où $\binom{r}{k}$ désigne le nombre de

combinaisons de k éléments pris parmi r . En déduire qu'il existe une suite de réels $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=1}^n a_k P(X+k)$$

Exercice n° 3

Soient $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ et $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ deux bases orthonormées de E , espace vectoriel euclidien,

et soit $u \in L(E)$. On pose $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u(e_i), f_j \rangle^2$

Question 1 : Montrer que $\|u(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle f_j, u(e_i) \rangle^2$

Question 2 : En déduire que A ne dépend ni des $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ni des $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. L'exprimer en fonction de u .

Exercice n° 4

Soient B une forme bilinéaire symétrique sur R^n et q la forme quadratique associée (telle que $\forall x \in R^n, q(x) = B(x, x)$).

Soit $G = \{f \in L(R^n) / q(f(x)) = q(x), \forall x \in R^n\}$.

Question 1 : Montrer que $f \in G \Leftrightarrow \forall (x, y) \in R^n \times R^n, B(f(x), f(y)) = B(x, y)$.

Question 2 : Préciser la structure de (G, o) , 'o' représentant l'opérateur de composition de l'espace des fonctions.

Question 3 : Soient $n=4$, $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique de R^4 , $q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$,

$f \in G$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$ sa matrice dans la base canonique. Appelons aussi M la matrice de

q dans cette base, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de A .

Question 4 : Montrer que $a_{44}^2 \geq 1$ et déterminer A^{-1} .

Exercice n° 5

On se propose ici de déterminer les sous-groupes d'un groupe cyclique.

On rappelle qu'un groupe cyclique peut s'écrire sous la forme $G = \{e_G, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, avec $g^n = e_G$ (élément neutre pour la loi considérée). n est alors appelé « ordre » du groupe G , et g « générateur » du groupe G .

Soient (G, \cdot) un groupe cyclique, H un sous-groupe non vide quelconque de ce groupe, g un générateur de G et :

$$\varphi : \begin{cases} Z \rightarrow G \\ n \mapsto g^n \end{cases}$$

Question 1 : Montrer qu'il existe $s \in N$ tel que $\varphi^{-1}(H) = sZ$, et que s divise l'ordre du groupe G .

Question 2 : Montrer que $H = \varphi(\varphi^{-1}(H))$.

Question 3 : Déterminer les sous-groupes de G .

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit $f: R^2 \rightarrow R$ définie par : $f(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - 2ay - b)^2$, où a et b sont deux constantes réelles données.

1. f est-elle bornée ? A quelle condition f peut-elle être nulle ?
2. On suppose que $a^2 + b < 0$, trouver, s'ils existent, les extrema de f .
3. On suppose que $a^2 + b > 0$. Chercher les extrema locaux et absolus de f .

Exercice n° 2

Soit $f: R^* \rightarrow R$ définie par : $f(x) = \frac{2^x}{x}$.

1. Tracer avec précision le graphe de f .
2. Résoudre l'équation : $2^x = x^2$ (on donnera des valeurs approchées avec une erreur inférieure à 0,5).

Exercice n° 3

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ définie, pour $x > -1$ et $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = nx \frac{(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 1.$$

1. Etudier la continuité de la fonction f_n pour tout $x > -1$.
2. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe pour tout $x > -1$.

Exercice n° 4

On pose : $P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.
2. On pose : $f(x) = \frac{1}{P(x)}$, trouver une primitive de $f(x)$ que l'on notera $F(x)$.
3. Vérifier que $F(x)$ admet des limites finies lorsque $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$.

Exercice n° 5

1. Trouver deux nombres réels A et B tels que la relation : $4n^3 = An^2(n+1)^2 + Bn^2(n-1)^2$ soit vérifiée pour tout entier n .
2. Dédire de la relation précédente la somme S_n des cubes des n premiers nombres entiers.
3. Montrer que l'on peut obtenir la somme S_n directement par récurrence.
4. On pose $u_n = \frac{S_n}{S_n}$, où s_n désigne la somme des n premiers nombres entiers.

Calculer $\sum_{k=1}^n u_k$

Exercice n° 6

Soient X un sous-ensemble fermé non vide de \mathbb{R}^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X . On appelle cône tangent à X en a , le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par :

$$T(X, a) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 / \exists (u_n) \in X, \exists (\lambda_n) \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (u_n - a) = u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X, a)$.
2. Déterminer $T(X, a)$ dans les cas suivants :
 - a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ et $a = (1,0)$
 - b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $a = (1,0)$
 - c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, -x^2 \leq y \leq x^2\}$ et $a = (0,0)$

Exercice n° 7

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B, deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans l'urne A et un jeton dans B que l'on échange en les plaçant dans B et A (étape 1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?
2. Soit (k, i) un couple d'événements possibles de X_n . Calculer la probabilité que $X_{n+1} = k$ sachant que $X_n = i$.

3. On pose $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où

P désigne la probabilité. Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

4. Etudier la suite vectorielle (V_n) . Déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots le texte suivant « *Les effets de la mondialisation* » (d'après un article de François HOUTART paru dans le magazine Tricontinentale de mars 2007).

Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Les effets de la mondialisation

Lorsque l'on parle de mondialisation, certains en soulignent les aspects positifs, c'est-à-dire l'accroissement des contacts entre les continents et les pays, les progrès remarquables de l'internet et des communications, les échanges de toute sorte, notamment sur le plan culturel. Personne ne met en doute de tels aspects de la mondialisation, mais ils doivent être situés dans un ensemble, qui permet de constater que les bienfaits de la mondialisation sont réservés à une petite minorité.

En effet, ce qu'on appelle aujourd'hui la mondialisation est en fait sur le plan économique, politique et culturel, l'extension mondiale de la logique économique du capitalisme. Le concept s'est imposé de manière universelle, notamment avec le développement du projet économique néolibéral à partir du milieu des années 1970. Il signifie principalement la mondialisation du capital, basée sur la libéralisation des échanges financiers ou des biens et services (mais pas l'émancipation de la main-d'œuvre).

La rupture des années 70

Les trente années qui ont suivi la deuxième guerre mondiale, ont été caractérisées par un développement économique considérable. Il y avait alors trois modèles principaux, qui ont tous contribué à la croissance. Le premier a été le modèle occidental (appelé keynésien, du nom de John Maynard Keynes, l'économiste anglais inspirateur du système). Il reposait sur un compromis entre capital, travail et Etat. Ce compromis a été obtenu, suite à la deuxième guerre mondiale, en raison des luttes des travailleurs pour faire reconnaître leurs droits et par crainte du communisme. Il s'agissait en fait d'une concession du capital envers le travail, concession garantie par l'Etat qui jouait un important rôle de redistributeur de la richesse. Ce modèle a pu se développer, avec des fruits sociaux appréciables, grâce à une augmentation rapide de la productivité qui permettait au capital de conserver un taux de rétribution suffisamment élevé. Avec la chute de la productivité dans le secteur industriel et de multiples périodes de surproduction caractéristiques du capitalisme, le modèle keynésien est entré en crise dès le début des années 1970.

Le deuxième modèle a été le socialisme, tel qu'il s'est développé dans les pays de l'Est européen et également en Chine, dans la péninsule indochinoise et à Cuba. Ce modèle constituait en principe une alternative au capitalisme, même régulé sous sa forme keynésienne. Il est également entré en crise, assez rapidement, pour des raisons internes (modèle économique de rattrapage du capitalisme, organisation autoritaire du champ politique) et externes (la guerre froide comme instrument de pression sur les économies socialistes). La chute du mur de Berlin en a été le point final en Europe. L'Asie de l'Est et du Sud-Est a, elle, changé de modèle à partir des années 80, adoptant alors une orientation capitaliste de développement économique. Cuba, plus fidèle aux objectifs socialistes, a néanmoins dû ouvrir ses frontières au capital extérieur et établir une double monnaie.

Le troisième modèle, appelé parfois le modèle de Bandung (lieu d'une conférence qui a réuni des peuples décolonisés après la deuxième guerre mondiale), était basé sur un développement national substituant une production locale aux importations et établissant un pacte entre le travail organisé (qui était minoritaire) et le capital d'une bourgeoisie nationale. Les paysans restaient cependant en marge et c'est le modèle qui est entré le plus vite en crise, notamment à cause du coût des transferts technologiques et des connaissances (une des principales origines de la dette du Tiers Monde).

Le développement du modèle néolibéral

Les trois modèles étant en crise, l'idée de développer l'économie mondiale en fonction d'un projet néolibéral s'est imposée au travers de la mise en œuvre de ce que l'on a appelé le Consensus de Washington. Celui-ci n'a pas été une décision formelle mais la cristallisation d'idées sur lesquelles les grands décideurs économiques (multinationales, FMI, Banque mondiale, Réserve fédérale américaine) étaient d'accord : il s'agissait d'exploiter au mieux les bienfaits supposés de la libéralisation de tous les échanges économiques. Le cadre théorique préexistait : le modèle néolibéral avait déjà été pensé par l'économiste autrichien Friedrich Hayek dès après la deuxième guerre mondiale.

Il en est résulté une double offensive, contre le travail et contre l'Etat, afin de diminuer la part de chacun d'eux dans la répartition de la richesse produite et d'augmenter ainsi la part du capital. Face à la crise d'accumulation, et à la chute du taux de profit, les détenteurs du capital ont en effet estimé indispensable de pallier le manque d'augmentation de la productivité par une autre répartition de la richesse.

L'offensive contre le travail s'est manifestée dans le monde entier : transformation de ses contenus grâce aux nouvelles technologies, réorganisation interne, flexibilité, délocalisations, diminution progressive de la sécurité sociale, diminution des pensions et finalement diminution progressive du salaire réel. Toutes ces évolutions ont été observées aussi bien dans les économies du Nord que dans celles du Sud. A cela, il faut ajouter de dures réactions contre les organisations ouvrières qui ont perdu de très nombreux adhérents et qui, surtout dans le Sud, ont été parfois confrontées à une véritable criminalisation de leurs leaders, avec, dans certains cas, élimination physique.

La deuxième offensive, celle contre l'Etat, s'est traduite par des vagues de privatisations concernant aussi bien les activités économiques propres des Etats que les services publics. A cela, on doit ajouter une surexploitation des ressources naturelles entraînant une augmentation très rapide de la dose de CO₂ dans l'atmosphère et le réchauffement du climat.

Le nouveau modèle de développement économique - construit sur la libéralisation totale des échanges et s'appliquant dans des sociétés inégales où le pouvoir de décision économique, politique et militaire était concentré et accaparé *in fine* par les pays du Nord et quelques pays émergents - a généré un accroissement très net des différences de développement et donc des écarts entre les riches et les pauvres. Ces différences se sont considérablement accentuées au cours des trente années d'extension des politiques néolibérales, au point que certains décideurs politiques et économiques ont commencé à s'en inquiéter, notamment au sein de la Banque mondiale.

Il faut ajouter que si ce modèle a permis le développement spectaculaire de 20% de la population, une partie importante de la classe moyenne a été rendue très vulnérable et la pauvreté a augmenté en chiffres absolus. Ainsi, en Amérique latine, il y avait 220 millions de pauvres au début des années 2000, soit 30 millions de plus que 10 ans auparavant. De telles évolutions correspondent à la logique même du système capitaliste, pour lequel il est plus intéressant d'avoir 20% de la population mondiale capable d'absorber la production de biens sophistiqués, sur lesquels le taux de profit est plus élevé, que de produire pour les 80% autres qui ont peu ou pas de pouvoir d'achat et qui ne contribuent guère à produire de la valeur ajoutée. En effet, le capitalisme contemporain, dominé par le capital financier, recherche des gains à court terme, sans grande préoccupation pour le long terme, notamment les coûts sociaux et les coûts écologiques.

Aujourd'hui, le capital, face aux crises du capitalisme industriel mais aussi financier, s'est défini trois nouvelles frontières. La première est le passage de l'agriculture paysanne à une agriculture productiviste de type capitaliste. En effet, c'est à cette condition que l'agriculture peut contribuer à l'accumulation du capital de manière importante. Tant que les produits agricoles ne deviennent pas des marchandises, il y a peu de possibilités de participation à l'accumulation du capital. La meilleure formule est évidemment l'extension de sociétés multinationales dans ce que l'on a appelé l'agro-business. La deuxième frontière, ce sont les services publics. Tant qu'ils restent du domaine de l'Etat ou des collectivités, ils ne contribuent que de manière faible à l'accumulation du capital. Mais une fois que des services, tels que l'électricité, l'eau, les transports, les téléphones, mais aussi la santé et l'éducation passent dans le domaine privé, la possibilité de profit devient beaucoup plus importante. Or, cela concerne des centaines de milliards d'euros. La conséquence sociale est cependant que la privatisation signifie généralement un accès plus difficile ou totalement exclu pour les plus pauvres.

La troisième frontière est constituée par les zones de biodiversité dans le monde, parce que l'industrie du futur se basera plus sur le biologique que sur le chimique. C'est vrai pour des industries telles que la pharmacie ou les cosmétiques, sans parler bien entendu de l'industrie alimentaire, mais encore plus, dans l'avenir, de la production de la bioénergie pour remplacer le pétrole en extinction progressive et particulièrement destructeur de l'environnement. Malheureusement, la formule capitaliste d'agriculture détruit considérablement les sols à cause de l'utilisation massive des engrais chimiques et des pesticides. Elle provoque des catastrophes sociales considérables dans les populations paysannes. Tant que la recherche de nouvelles sources d'énergies renouvelables restera dans la logique du capitalisme, elle ne débouchera pas sur de réelles alternatives écologiques et sociales.

Le néolibéralisme n'est pas un accident de l'histoire. Il se situe dans la logique même de l'accumulation du capital. Il dispose des institutions juridiques nécessaires sur le plan mondial, c'est-à-dire la Banque mondiale, le FMI et l'Organisation Mondiale du Commerce. Les deux premiers organismes n'ont rien de démocratique car les décisions sont prises au sein du Conseil d'administration où les pays sont représentés en fonction du capital dont ils disposent. Par ailleurs, les Etats-Unis possèdent un droit de veto. C'est le seul pays du monde jouissant d'un tel avantage. Les décisions sont donc prises en fonction des intérêts de ceux qui disposent du capital - les pays du Nord - qui en règle générale favorisent le système existant. Par ailleurs, l'exploitation des richesses du Sud par le capital du Nord n'a jamais été aussi grande dans l'histoire. Elle est plus importante que du temps du colonialisme. Alors que le monde a multiplié par sept sa richesse au cours des 50 dernières années, jamais il n'y a eu autant de personnes vivant dans l'extrême pauvreté.

Tout cela provoque évidemment des réactions, parfois contradictoires. D'un côté, les responsables économiques et politiques du système lui-même n'hésitent pas à soutenir la militarisation de certains régimes pour conserver le contrôle des richesses naturelles et de l'énergie. De l'autre, ils sont effrayés de certaines conséquences sociales et ils affirment de grandes ambitions comme celles des plans de lutte contre la pauvreté de la Banque mondiale ou les objectifs du Millenium de l'ONU. Ces derniers consistent à vouloir réduire l'extrême pauvreté de moitié en 2015. Outre le fait que l'objectif ne sera probablement pas atteint, n'est-il pas scandaleux d'accepter à l'avance qu'en 2015 il y ait encore 800 millions de personnes vivant dans une grave indigence alors que les solutions existent pour résoudre ces problèmes en moins d'une génération.

Par ailleurs, depuis la fin des années 90, une convergence des mouvements sociaux et des organisations non gouvernementales progressistes s'est amorcée et cela, 25 ans après le Consensus de Washington qui a affirmé la prééminence des stratégies néolibérales et 10 ans après la chute du mur de Berlin qui a symbolisé le triomphe du capitalisme. Ces résistances existaient depuis longtemps dans différents domaines mais, pour la première fois, une jonction de mouvements et de milieux qui n'avaient précédemment rien à voir les uns avec les autres, semble s'opérer. On a vu à Seattle ou plus tard dans le Forum social mondial se réunir les syndicats ouvriers, les paysans sans terre, les peuples autochtones, les femmes, les écologistes, les mouvements de défense des droits de l'homme, etc. Tous ont progressivement découvert qu'ils avaient le même adversaire, c'est-à-dire le néolibéralisme. Les convergences de résistance se sont manifestées au cours des dernières années de manière de plus en plus massive, notamment dans le cadre des Forums sociaux (Porto Alegre), mais aussi dans celui de réseaux d'acteurs collectifs, comme celui des paysans dans Via Campesina par exemple.

En Amérique latine, on voit émerger des partis de gauche, fruit en grande partie des mouvements sociaux, qui mettent en route une autre logique économique fondée sur la solidarité plutôt que sur la compétition. Ils rendent au peuple sa souveraineté sur les ressources naturelles et ils mettent en route des modèles économiques contredisant les logiques du fonctionnement capitaliste : échanges sans passer par le système bancaire mondial, troc entre viande et pétrole (Argentine - Venezuela), médecins et pétrole (Cuba - Venezuela), etc. Ils construisent aussi un nouveau modèle d'intégration économique. Ces exemples montrent que des alternatives sont possibles.

La mondialisation telle qu'elle existe aujourd'hui a des effets écologiques et sociaux très négatifs. Les changements climatiques en sont une manifestation, mais aussi l'accroissement de la pauvreté et l'accroissement des distances économiques et sociales entre groupes humains. C'est la logique du système capitaliste qui est en jeu et par conséquent, c'est cette dernière qu'il faut délégitimer...

D'après François Houtart
(*Magazine Tricontinentale*, mars 2007)

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

La lisibilité de la copie sera prise en compte dans la notation.

Encadrer chaque résultat obtenu.

Préciser clairement lorsqu'une réponse est admise, non traitée, ou encore non totalement résolue.

Exercice

Soit la matrice C_n définie par

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

où les complexes $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(b_j)_{j=1,\dots,n}$ sont tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et j variant entre 1 et n .

On notera pour tout ce qui suit : l_1, \dots, l_n les numéros de lignes 1 à n , et c_1, \dots, c_n les numéros de colonnes 1 à n .

1. Exprimer C_1
2. Exprimer C_2
3. Calculer $\det(C_1)$
4. Calculer $\det(C_2)$ que l'on exprimera comme une fraction de facteurs.

5. On désire retrouver le déterminant de C_2 par une autre méthode.
 On précisera à quoi est équivalent le déterminant de C_2 lorsqu'on effectue les opérations détaillées ci-après. De plus, on veillera à écrire à chaque étape, l'expression obtenue en justifiant les simplifications éventuelles que l'on effectuera systématiquement autant que possible.
- Multiplier chaque colonne c_j par $(a_2 + b_j)$, pour tout $j = 1, 2$.
 - Retrancher la dernière ligne l_2 à toutes les autres.
 - Retrancher la dernière colonne c_2 à toutes les autres.
 - Retrouve-t-on le déterminant de C_2 ?
6. A l'aide de la méthode proposée précédemment pour l'obtention de C_2 , exprimer la formule du déterminant de C_n , dit déterminant de Cauchy, en respectant chacune des étapes soigneusement mises en valeur.

Problème

On désire étudier la densité généralisée de Pareto (GPD) et le comportement de sa fonction de survie.

On définit les objets suivants :

- On appelle densité de probabilité, la fonction $f(x)$, intégrable, positive, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

- On note $P_X(A)$ la probabilité que X appartienne à l'ensemble A lorsque X suit la loi de densité f la quantité :

$$P_X(A) = \int_A f(x)dx.$$

- On appelle fonction de survie $S(t)$, la probabilité que X appartienne à l'ensemble $]t, +\infty[$, pour t réel :

$$S(t) = P_X(]t; +\infty[).$$

- Soit $q \geq 0$ avec $q \neq 1$. L'entropie de Rényi-Tsallis est définie sur un espace fonctionnel par l'expression suivante :

$$H_q(f) = \frac{1}{1-q} \left(\int f^q(x)dx - 1 \right).$$

- L'entropie de Shannon est définie sur un espace fonctionnel dont les éléments sont à valeurs strictement positives. Elle est définie par l'expression :

$$H(f) = - \int f(x) \ln(f(x))dx,$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

- Pseudo-distance de Bregman :

Soit F une fonction définie sur \mathcal{A} un convexe fermé, continument dérivable, strictement convexe, à valeurs réelles. On appelle pseudo-distance (ou divergence) de Bregman aux points a et b de \mathcal{A} :

$$d_F(a, b) = F(a) - F(b) - \langle D_b^1 F, (a - b) \rangle,$$

où $D_b^1 F$, désigne la différentielle première de F calculée au point b et \langle , \rangle un produit scalaire sur \mathcal{A} .

A. Préliminaires :

1. Soit $f(x)$ la densité de la loi exponentielle de paramètre $\sigma > 0$ définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right).$$

Calculer sa fonction de survie $S(t)$

2. Soient les paramètres $(\gamma, \sigma) \in (\mathbb{R}_*, \mathbb{R}_*^+)$. On considère S la fonction de survie définie pour tout t réel, par

$$S(t) = \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}t\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Calculer la densité f de la loi correspondant à cette fonction de survie dans les cas :

- (a) $\gamma \neq 0$,
 - (b) $\gamma = 0$ (on définit alors la fonction de survie par sa limite lorsque γ tend vers 0).
3. Calculer la limite de H_q lorsque q tend vers 1 et f est une densité de probabilité. Que remarque-t-on ?

B. Maximisation sous contraintes :

Soient μ et θ deux réels finis. Pour $0 < q < 1$, on désire résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{G \in \mathcal{F}} H_q(G) \\ \text{avec } \int_0^{+\infty} xG(x)dx = \mu \text{ et } \int_0^{+\infty} G(x)dx = \theta \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathcal{F} = \{G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}\}$.

1. On considère la divergence de Bregman $B(f, g)$ définie par

$$\int d_F(a; b)dx$$

calculée aux points $a = f$ et $b = g$, f et g étant deux densités de probabilité, le produit scalaire sur \mathbb{R} étant $\langle x; y \rangle = xy$, pour la fonction convexe $F : x \mapsto -x^q$.

Exprimer $B(f, g)$ en fonction de f, g et q .

2. Pour $q \neq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, on pose

$$G^*(x) = \alpha^{\frac{1}{q-1}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}x\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

- (a) Exprimer en fonction de G, q et G^* la pseudo-distance de Bregman $B(G, G^*)$ lorsque G vérifie (1).
- (b) Montrer alors que

$$\int G(x)G^*(x)^{q-1}dx = \int G^*(x)^q dx.$$

- (c) Montrer que " $B(G, G^*)$ positive ou égale à zéro" équivaut à " $G = G^*$ ".
- (d) En déduire une inégalité entre $H_q(G^*)$ et $H_q(G)$. On précisera le domaine d'appartenance de q .
- (e) Conclure quant au problème de maximisation sous contraintes que l'on se proposait de résoudre.
- (f) Que dire dans le cas de l'entropie de Shannon (cas $q = 1$) ? (on explicitera les valeurs de μ, θ, G^* ainsi que la valeur de l'entropie de Shannon en le point atteignant ce maximum).