PROBLEME D'ANALYSE : PREPA BAC N°1

Problème 1:

A. 1. Soit f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

- a. Etudier les variations de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
 - b. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 5 cm).
2. Calculer en cm^2 l'aire de domaine plan Δ compris entre la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ on pose $g(x) = f(\sin x)$

Montrer que la fonction g est une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ de la fonction h

$$\text{telle que } h(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

B. Dans tout la suite du problème a désigne un réel de $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$. Et pour tout entier $n \geq 1$, on

$$\text{pose } I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} dt.$$

1. Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a)$

Problème 2:

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 & \text{et } f(1) = 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases} \quad \text{et}$$

$$I = \int_0^1 f(t) dt$$

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $I(x) = \int_x^1 f(t) dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$

On ne cherche pas à calculer ces intégrales.

1) Soit K la fonction définie par $K(x) = J(x^2) - J(x)$, $x \in]0, 1[$

a) Montrer que K est dérivable sur $]0, 1[$ et $K'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - 2f(x^2))$

b) Prouver que pour tout $x \in]0, 1[$: $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$

$$\text{En déduire que pour tout } x \in]0, 1[, : I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{\ln t} dt \quad (1)$$

2) Calculer la dérivée de $h : t \rightarrow \ln(-\ln t)$ sur $]0,1[$,

En déduire que pour tout $x \in]0,1[: \int_{x^2}^x \frac{-1}{t \ln t} dt = \ln 2$ (2)

3) Prouver que pour tout x élément de $]0,1[$ et $t \in]0,x[: 0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$

En déduire que pour tout $x \in]0,1[: 0 \leq \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln t} dt \leq \frac{-x}{\ln x}$ (3)

4) En utilisant (1), (2) et (3) déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers zéro.

5) Etablir que pour tout $x \in]0,1[: I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$. En déduire que : $0 \leq I - I(x) \leq x$

6) Prouver finalement que $I = \ln 2$

Problème 3:

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 10cm$)

A. 1. Etudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$

Pour $n \geq 2$, étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n-1}) et vérifier que le point $A_n(n; f_n(n))$ de (C_n) est aussi sur (C_{n-1}) .

2. Construisez sur un même graphique les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) .

B. 1. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = f_n(n)$.

En utilisant les résultats de la partie **A.** montrer que (U_n) est décroissante.

2. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$

a. Montrer que pour tout t de $[0; 1]$, $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$

b. Déduisez en que, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$

3. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

b. Déduisez en que, pour tout n , $n \geq 2$ $U_n \leq e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)}$

4. a. Démontrer que pour tout $n \geq 2$ $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$

b. Déduisez en que, pour tout $n \geq 2$ $U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln n}$. Quelle est la limite de la suite (U_n)

C. Pour a fixé, positif, et pour tout entier n , $n \geq 1$, on pose : $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1. Calculer $I_1(a)$.

2. Montrer que pour $n \geq 1$, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$

Déduisez en un encadrement de $I_n(a)$.

3. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quant n tend vers $+\infty$.

4. Trouver lorsque $n \geq 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et déduisez en que pour tout

$$n \geq 2 \quad I_n(a) = 1 - e^{-a} \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$$

L'égalité est-elle valable pour $n = 1$

Problème 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

- 1) a) Etudier les variations de f et démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
b) Déterminer les asymptotes de C_f et tracer C_f (On pourra montrer à $+\infty$ que $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$).
- 2) a) Démontrer que pour tout réel x : $|f'(x)| < 1$ et $f''(x) = 1 - (f'(x))^2$.
b) Démontrer que si $x \in]-1; +1[$ il existe un unique réel y et un seul tel que $f'(y) = x$.
c) Exprimer y en fonction de x .

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $I_n(y) = \int_0^y [f'(x)]^n dx$

- a) Justifier l'existence de $I_n(y)$
- b) Calculer I_0 et I_1
- c) En utilisant $[f'(x)]^2 = 1 - f''(x)$ démontrer que

$$\text{pour tout } n \geq 2 \quad \text{on a} \quad I_n(y) = I_{n-2}(y) - \frac{1}{n-1} [f'(y)]^n$$

a) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $I_p(y) = y - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k-1} [f'(y)]^{2k-1}$

$$I_{2p-1}(y) = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k} [f'(y)]^{2k}$$

- b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \int_0^y (f'(u))^{2p} du \leq y [f'(y)]^{2p}$
- c) En déduire y étant fixé que la suite de terme général $\int_0^y (f'(u))^{2p} du$ est convergente.

Préciser sa limite

Problème 5:

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ si $t \in]0, 1[$.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le but du

problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$.

Partie A : Etude de f

1. a. Montrer que f est continue en 0 et en 1.
- b. Montrer que f est dérivable sur]0,1[. Calculer f'(t) et montrer que f'(t) a le même signe que $\varphi(t)$ où φ est la fonction définie sur]0, 1[par $\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$.
- c. Etudier les variations puis le signe de φ . En déduire le signe de f'.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on déduire pour la tangente à C au point O ?

2. a. Prouver que, pour tout élément u de $[0, \frac{1}{2}]$, $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$. En déduire que

$$0 \leq -\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2}) \leq \frac{2u^3}{3}.$$

- b. Soit g la fonction définie sur]0, 1] par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Prouver que, pour tout élément h

$$\text{de } [-\frac{1}{2}, 0], 0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}.$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser g'(1).

- c. En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe C (unité graphique : 10cm).

Partie B : Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de]0, 1], on pose $I(x) = \int_x^1 f(t) dt$ et $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.)

1. Soit K la fonction définie sur]0, 1] par $K(x) = J(x^2) - J(x)$.

- a. Montrer que K est dérivable sur]0, 1] et que $K'(x) = \frac{1}{x} [f(x) - 2f(x^2)]$.

- b. Prouver que, pour tout élément x de]0, 1], $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$.

- c. En déduire que, pour tout élément x de]0, 1], $I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$. (1)

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur]0, 1[, $\int_{x^2}^x \frac{-1}{t \ln t} dt = \ln 2$. (2)

3. Prouver que, pour tout élément x de]0, 1[et tout élément t de]0, x[, $0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$.

En déduire que, pour tout élément x de]0, 1[, $0 \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{-x}{\ln x}$. (3)

4. A partir de (1), (2) et (3) déterminer la limite de I(x) lorsque x tend vers 0.

5. Etablir que, pour tout élément x de]0, 1], $I - I(x) = \int_0^x f(t) dt$. En déduire que

$$0 \leq I - I(x) \leq x$$

6. Prouver finalement que $I = \ln 2$.

Problème 6 :

Partie A

1. Déterminer les solutions h sur IR de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Ce document est tiré du site : www.scienceherbe12.wixsite.com/scienceherbe

2. On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
- Déterminer les réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F).
 - Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E).
 - En déduire toutes les solutions de (F)
 - Donner la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle C la courbe représentative de f.

On se propose d'étudier cette fonction ainsi l'équation $f(x) = 0$.

- Calculer la fonction f' dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f' sur $[0, +\infty[$. Indiquer la limite de f' en $+\infty$. En déduire le signe de f' sur $[0, +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$. Indiquer la limite de f en $+\infty$.
 - Montrer que C admet une asymptote d que l'on déterminera.
- Construire d et C sur un même graphique.
 - Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une solution et une seule. On note α cette solution.
 - Justifier l'encadrement $1 \leq \alpha \leq 2$.

Partie C

On se propose d'étudier une méthode d'approximation de α

On observe pour cela que α est l'unique solution de l'équation de l'équation $g(x) = x$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

- Etudier les variations de g sur J. on ne demande pas de construire sa courbe représentative. En déduire que pour tout élément x de J, $g(x)$ appartient encore à J.
- Montrer que pour tout x de J, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduire que pour tout x de J, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$.

- Soit (u_n) la suite d'éléments de J définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
Pour tout entier n, positif non nul.

- montrer que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |u_n - \alpha|$.
- En déduire que pour tout entier n, positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Déterminer une indice p pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Calculer u_p à l'aide de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les trois premières décimales)