UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 pts).

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz.
Le premier jour de l'année, il y'a deux 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.
Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.
Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.

On appelle J_n l'événement "la cantine propose du riz le $n^{\text{ième}}$ jour" et K_n l'événement "la cantine n'en propose pas le $n^{\text{ième}}$ jour".

Soit p_n la probabilité de l'événement J_n.

1. Déterminer $p\Big(J_2/J_1\Big)$ et $p\Big(J_2/K_1\Big)$. En déduire p_2. **0,25+0,5+0,5=1,25 pt**

2. Montrer que $p_n = -\dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{2}{3}$. **0,75 pt**

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = p_n - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **0,5 pt**

b) Calculer u_n puis p_n en fonction de n. **0,5 +0,25= 0,75 pt**

c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs.

Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{8}{15}$. **0,75 pt**

EXERCICE 2 (4 pts). Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

$$A = \overline{211},\ B = \overline{312} \text{ et } C = \overline{133032}.$$

1. Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3. **0,25 pt**

2. a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. **0,5 pt**

b) En déduire que a divise 8. **0,25 pt**

c) Déterminer alors a. **0,5 pt**

3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4. **0,25 pt**

4. Dans cette question on suppose que $a = 4$.

a) Ecrire A, B et C dans le système décimal. **0,75 pt**

b) Montrer alors que $C = A \times B = \text{ppcm}\ (A,\ B)$.

En déduire que l'équation : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. **0,25+0,5=0,75 pt**

5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.

a) Vérifier que $(19, -13)$ est une solution de cette équation. **0,25 pt**

b) Résoudre cette équation. **0,5 pt**

PROBLEME (12 points).

Le problème est composé de trois parties A, B et C.

Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A

Le plan euclidien (P) est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \frac{x}{ax - a + 1},$$

où a est un réel différent de 0 et de 1.

On note C_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$.

Partie A: (5,5 pts)

1. a) Montrer que l'application φ de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= -y + 1 \\ y' &= -x + 1 \end{cases}$$

est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera. **0,5 pt**

b) Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a et montrer que la courbe C_a est globalement invariante par φ.

0,5 pt

2. a) Montrer que toutes les courbes C_a passent par deux points fixes indépendants de a.

0,25 pt

b) Déterminer les points fixes de f_a, c'est à dire les réels ℓ tels que $f_a(\ell) = \ell$. **0,25 pt**

3. a) Etudier les variations de f_a ; on discutera suivant les valeurs de a. **0,5 pt**

b) Construire dans le repère $\mathcal{R}$ les courbes C_{-2}, $C_{0,5}$

(On prendra pour unité graphique 1 cm). **0,5+0,25=0,75 pt**

c) Construire dans un même repère orthonormé d' unité graphique 2 cm les courbes $C_{1,5}$ et C_2. **0,25+0,25=0,5 pt**

4. Soit F la fonction de $]-\infty, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx \text{ et } F(0) = \int_0^1 x\,dx.$$

a) Montrer que pour tout $a < 1$ et $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto ax - a + 1$ est strictement positive dans $[0, 1]$.

Etablir alors que la fonction F est définie sur $]-\infty, 1[$. **0,25+0,25=0,5 pt**

b) En faisant le changement de variable $t = ax - a + 1$, vérifier que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2}\ln(1-a).$$

Déterminer alors $\lim\limits_{a \to 1^-} F(a)$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} F(a)$. **0,25 × 3=0,75 pt**

c) Démontrer que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0, 1],\ f_a(x) \in [0,\ 1].$$

0,25 pt

d) En utilisant le résultat de la question **c)**, montrer que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0,1],\ |f_a(x) - x| \leq |a|.$$

Calculer alors $\lim\limits_{a\to 0}\Big|F(a) - F(0)\Big|$ puis $\lim\limits_{a\to 0} F(a)$.
La fonction F est-elle continue au point 0 ? **0,25 × 3=0,75 pt**

Partie B: (4 pts)

On note Ω_a le point de coordonnées $\left(1 - \dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$$

1. a) Montrer que $\mathcal{R}_a = (\Omega_a,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. **0,25 pt**

b) Soit M un point du plan de couple de coordonnées $(x,\ y)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Appelons $(X,\ Y)$ son couple de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a$. En utilisant la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M}$, montrer que :

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$$

0,5 pt

c) Vérifier que la courbe (C_a) a pour équation $Y^2 - X^2 = \dfrac{2(a-1)}{a^2}$ dans le repère $\mathcal{R}_a$.
0,5 pt

d) Déterminer la nature de C_a; préciser ses sommets S_a et $S_a^{\prime}$ suivant les valeurs de a.
0,25+0,5=0,75 pt

2. Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Montrer que (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $a < 1$. **0,5 pt**

3. On suppose que $a > 1$.
a) Calculer en fonction de a les distances $\Omega_a S_a$ et $\Omega_2\Omega_a$.
Pour calculer $\Omega_a S_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}_a$.
Pour calculer $\Omega_2\Omega_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}$. **0,25 +0,25 =0,5 pt**
b) En appliquant le théorème de pythagore au triangle $\Omega_2\Omega_a S_a$, calculer $\Omega_2 S_a$; **0,5 pt**
c) En déduire que les sommets de C_a sont sur un cercle de centre Ω_2 dont on précisera le rayon. **0,5 pt**

Partie C: (2,5 pts)

Dans cette partie, a est un élément de l'intervalle $]0,1[$.

Soit u_0 un élément de $[0;\ 1]$ et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. a) Montrer que la fonction f_a est strictement croissante dans $[0,1]$.
Quel est l'image de l'intervalle $[0,\ 1]$ par f_a ? **0,25 +0,25=0,5 pt**
b) Montrer que la suite (u_n) est partout définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,\ 1]$.
Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$? Si $u_0 = 1$? **0,5+0,25+0,25=1 pt**

2. On suppose que u_0 est différent de 0 et 1.
a) Vérifier que la suite (u_n) est strictement monotone. **0,5 pt**
b) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite. **0,25 +0,25=0,5 pt**