

## SÉRIE N°2-1: ISOMETRIE

**Exercice 1 :** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère l'application  $F$  qui à tout point  $M(x; y)$  associe le point  $M'(x'; y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{13}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $F$  est bijective
- 2) Montrer que  $F$  est une isométrie
- 3) Montrer que  $F$  admet un unique point invariant  $I$ , en déduire la nature de  $F$ .
- 4) Soit  $O'$  l'image de  $O$  par  $F$ . Déterminer une mesure de l'angle  $(\vec{IO}; \vec{IO'})$ . En déduire les éléments caractéristiques de  $F$ .

**Exercice 2 :** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère l'application  $G$  définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{13}{2} \\ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y \end{cases}$$

- 1) Démontrer que  $GoG$  est une translation dont on précisera le vecteur  $\vec{u}$
- 2) Démontrer que  $G$  est la composée dans un ordre indifférent, d'une symétrie orthogonale que l'on précisera et de la translation de vecteur de  $\frac{1}{2}\vec{u}$

**Exercice 3 :** Soient  $(D)$  et  $(D')$  deux droites sécantes en  $I$ .  $P$  et  $Q$  sont deux points donnés tels que la droite  $(PQ)$  n'est parallèle ni à  $(D)$  ni à  $(D')$ .

- 1) Construire un point  $M$  de  $(D)$  et un point  $N$  de  $(D')$  tels que  $PQNM$  soit un parallélogramme.
- 2)  $A$  est un point extérieur à une droite  $(D)$ ,  $B$  est un point de  $(D)$  et  $C$  est le point tel que  $ABC$  soit un triangle équilatéral de sens direct.

Quel est le lieu géométrique de  $C$  lorsque  $B$  décrit  $(D)$  ?

**Exercice 4 :**  $(C)$  est un demi-cercle de diamètre  $[AB]$ ,  $M$  est un point de  $(C)$  distinct de  $A$  et  $B$ .  $N$  est le point de la demi-droite  $[BM)$  tel que  $AM = BN$ .

Quel est le lieu géométrique du point  $N$  lorsque  $M$  décrit  $(C)$  privé de  $A$  et  $B$  ?

**Indication :** Considérer la rotation qui transforme  $A$  en  $B$  et  $M$  en  $N$

**Exercice 5 :** Dans le plan orienté, on considère un triangle  $AMB$  d'hypoténuse  $[AB]$ . On construit alors le carré  $AMNP$  de côté  $[AM]$  tel que  $(\vec{AM}; \vec{AP}) = \frac{\pi}{2}$ . On note  $I$  le milieu du carré.

Quel est le lieu géométrique des points  $M, N, P$  et  $I$  ?

**Exercice 6 :** Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABC$  rectangle et isocèle en  $A$  tel que une mesure de l'angle  $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$ . On appelle  $R$  la rotation de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $C$  et  $T$  la translation de vecteur  $\vec{AB}$ . On note  $I$  le milieu de  $[BC]$

- 1) Construire le point  $J$  image de  $I$  par  $R$ .
- 2) On pose  $F_1 = RoT$  et  $F_2 = ToR$   
Déterminer  $F_1(J)$  et  $F_2(I)$ , en déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $F_1$  et  $F_2$ .
- 3) Soit  $M$  un point du plan,  $M_1$  son image par  $F_1$  et  $M_2$  l'image de  $M$  par  $F_2$ . Quelle est la nature du quadrilatère  $BCM_1M_2$  ?

**Exercice 7 :** Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABC$  rectangle et isocèle en  $A$  de sens direct. On appelle  $I$  le milieu de  $[BC]$

- 1) Construire les triangles équilatéraux  $ABD$  et  $ACE$  tels que :  $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$
- 2) Tracer les droites  $(AI)$ ,  $(CD)$  et  $(BE)$ . Que constatez-vous ?
- 3) On appelle  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $S$  la réflexion d'axe  $(AI)$ .
  - a) Justifier que  $roSor$  est une isométrie fixant  $A$ .
  - b) Construire le triangle équilatéral  $AJK$  tel que  $JC = BC$  et  $(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$
  - c) Caractériser la composée  $roSor$
  - d) Déterminer les images des points  $D$  et  $B$  par  $roSor$
  - e) Démontrer que les droites  $(CD)$ ,  $(BE)$  et  $(AI)$  sont concourantes.

**Exercice 8 :** Dans le plan orienté,  $ABCD$  et  $AEFG$  sont de carrés tels que :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$  et  $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}$ . On désigne par  $M, N, P$  et  $Q$  les milieux respectifs des segments  $[BD]$ ,  $[DE]$ ,  $[EG]$ ,  $[GB]$

- 1) Montrer que  $MNPQ$  est un parallélogramme.
- 2) Soit  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ 
  - a) Déterminer l'image du segment  $[BE]$  par la rotation  $r$ .
  - b) En déduire que  $MNPQ$  est un carré.
- 3) On désigne par  $l$  et  $m$  les longueurs respectifs des côtés des carrés  $ABCD$  et  $AEFG$ . On pose  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = \alpha[2\pi]$ 
  - a) Exprimer en fonction de  $l, m$  et  $\alpha$  la longueur des côtés du carré  $MNPQ$ .
  - b) Déterminer  $\alpha$  pour que l'aire du carré  $MNPQ$  soit maximale.

**Exercice 9 :** Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral  $ABC$  direct. On désigne par  $r_1$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $r_2$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $N = r_1(M)$ ,  $M' = r_2(N)$  et  $r = r_2 \circ r_1$ . Soit  $D$  le symétrique de  $C$  par rapport à la droite  $(AB)$

- 1) Déterminer  $r(D)$  et  $r(B)$
- 2) Montrer que  $r$  est la symétrie de centre le milieu  $\Omega$  de  $[BD]$
- 3) Montrer que l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan tels que  $M, N$  et  $M'$  sont alignés est un cercle passant par les points  $A$  et  $\Omega$ . (on pourra considérer l'angle  $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MA})$ )
- 4) Prouver que  $\Gamma$  admet  $[AD]$  pour diamètre et que le milieu  $I$  de  $[AB]$  appartient à  $\Gamma$
- 5) Construire  $\Gamma$

**Exercice 10 :** Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABC$  tel que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et  $AB < AC$ . On note  $(C)$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $O$  son centre. Soit  $E$  le milieu de  $[BC]$  et  $P$  le point de  $[AC]$  tel que  $AB = CP$ .

La droite  $(OE)$  coupe  $(C)$  en  $I$  et  $J$ , tel que  $J$  et  $A$  soit sur le même arc  $\widehat{BC}$  du cercle  $(C)$ .

- 1-a) Faire une figure
- b) Quel est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et  $MB < MC$  ?
- 2- a) Justifier qu'il existe une rotation unique  $R$  telle que  $R(A) = P$  et  $R(B) = C$ . Déterminer son angle.
- b) Démontrer que son centre est un point de  $(C)$  que l'on précisera.
- c) Quelle est la nature du triangle  $JAP$  ?
- 3-a) Déterminer l'image de  $B$  par la composée  $RoS_B$ , où  $S_B$  est la symétrie de centre  $B$ .
- b) Donner la nature et les éléments caractéristique de cette composée.

**Exercice 11 :** Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABC$  tel que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .  $\Gamma$  est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

La médiatrice de  $[BC]$  coupe  $\Gamma$  en  $A$  et  $D$ ;  $A'$  est le point d'intersection des droites  $(BD)$  et  $(AC)$ .

- 1) Démontrer que  $A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $C$ .

- 2) On désigne par  $S_{(BD)}$ ,  $S_{(DC)}$ ,  $S_{(AC)}$  et  $S_{(AB)}$  les symétries orthogonales par rapport aux droites  $(BD)$ ,  $(DC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  respectivement.  
Quelle est la nature des applications  $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$  et  $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$  ? On précisera les éléments caractéristiques.
- 3) Soit  $(\Delta)$  la parallèle à  $(DC)$  menée par  $A$  et  $S_{(\Delta)}$  la symétrie orthogonale par rapport à  $(\Delta)$ .  
Démontrer que  $S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$  et  $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(DA)} \circ S_{(\Delta)}$
- 4) Retrouver le résultat du 1) en utilisant l'application  $t = S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$  que l'on précisera.

**Exercice 12 :** Soit  $ABC$  un triangle rectangle et isocèle tel que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . On note  $I$  le milieu de  $[BC]$ ,  $R_B$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $R_C$  la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $T$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{BC}$  et  $f = R_B \circ T \circ R_C$

- 1) Déterminer la nature de  $f$ .
- 2) Quelle est l'image de  $B$  par  $f$  ?
- 3) Caractériser  $f$ .