SCIENCE EN HERBE MATHS PREMIERE S1 & S3

COMPOSITION N°2 DU 1er SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle équilatéral de côté 4 ; On appelle O le centre du cercle circonscrit et I le milieu de [AB]. On désigne par f la fonction qui, à tout point M du plan, associe le nombre réel, noté $f(M) = MA^2 + MB^2$.

1° Démontrer que, quel que soit M, on a : $f(M) = 2MI^2 + 8$.

2° Déterminer l'ensemble (Γ)des points M du plan tels que : $f(M) = 16$.

3° Plus généralement, soit k un nombre réel. On note (E_k)l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

a) Démontrer que, si k est strictement supérieur à 8, l'ensemble (E_k)est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

b) Déterminer k pour que O appartienne à (E_k).

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté m.

1° I est le barycentre de (B, 4) et (C, 1), et J le barycentre de (C,2) et (A,3).

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de m.

b) Prouver que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AC).

2° Soit a, b et trois réels. On désigne par K le barycentre de (A, a) et (B, b), et par L le Barycentre de (A, a+b–c) et (C, c).

Montrer que les droites (KL) et (AC) sont orthogonales si, et seulement si, b = 2.

Exercice 3

Soit l'équation (E) d'inconnue : $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$.

1° a) Montrer que 0 n'est pas solution de (E).

b) En déduire (E) a les mêmes solutions que (E') : $x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

2°On pose $X = +\frac{1}{x}$.

a) Montrer que $x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$.

b) Montrer que si est solution de (E'), alors X est solution de (E'') : $X^2 + 10X + 24 = 0$.

3° Résoudre (E''), puis en déduire les solutions de (E).

Exercice 4

a, b et étant trois réels distincts, on pose :

$$P(x)=(b-c)(x-a)\left[(x+a)+(b+c)\right]+(c-a)(x-b)\left[(x+b)+(c+a)\right]$$
$$+(a-b)(x-c)\left[(x+c)+(a+b)\right].$$

Calculer P(a), P(b) et p(c). En déduire, sans calcul, P(x).

Exercice 5

On donne la fonction f définie de IR dans IR par $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 \; si \; x\geq 1 \\ \dfrac{6x}{2+x} \; si \; x<1 \end{cases}$

1° Etudier la variation de f sur $]-\infty;1[\; et \; sur \; [1,+\infty[$. (**On utilisera le taux de variation**).

2° En déduire que f est injective.

3° Montrer que f est surjective, puis bijective.

4° Expliciter $f^{-1}(x)$.

5° On donne g(x) = 2x+1. Expliciter $g\circ f(x)$. Donner le sens de variation de $g\circ f$.