

SERIE N°2-2 : SUITES NUMERIQUES**Exercice 1 :**

On considère les 2 suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$ et

$$\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Calculer U_1, V_1, U_2, V_2 .
- 2) Soit la suite (W_n) définie, pour tout entier naturel n , par $W_n = V_n - U_n$.
Montrer que W est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- 3) Etudier le sens de variation des suites (U_n) et (V_n) .
- 4) Montrer que (U_n) est majorée par 4 et (V_n) est minorée par 3.
- 5) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par $t_n = \frac{U_n + 2V_n}{3}$.
Démontrer que la suite (t_n) est croissante.
- 6) En déduire U_n et V_n en fonction de n .
- 7) Calculer alors la limite des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice 2 :

Soit U et V 2 suites numériques définies par

$$U_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2}$$

$$V_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1+V_n}{2}$$

- 1) Calculer U_1, U_2, V_1, V_2, V_3 .
- 2) On définit 2 nouvelles suites s et d par $s_n = U_n + V_n$ et $d_n = V_n - U_n$.
 - a) Vérifier que la suite s est constante. Que vaut s_n
 - b) Vérifier que la suite d est géométrique
Exprimer d_n en fonction de n .
 - c) En déduire de a) et b) les expressions de U_n et V_n en fonction de n . Les suites U et V convergent-elles.

Exercice 3 :

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par :

$$U_1 = 12, V_1 = 1$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{9} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$$

- 1) Soit (W_n) est la suite définie par $W_n = V_n - U_n$.
 - a) Montrer que (W_n) est géométrique puis exprimer W_n en fonction de n .

- b) Montrer que (W_n) est convergente puis calculer sa limite.
- 2) Démontrer que (U_n) est décroissante et (V_n) croissante .
- 3) Démontrer que $U_1 \geq U_n \geq V_n \geq V_1$
- 4) En déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite l .
- 5) On pose $T_n = 3U_n + 8V_n$
Démontrer que T_n est constante puis déduire l .

Exercice 4 :(bac G 2002)

On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ 3U_{n+1} + 2U_n = -\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

- 1) Calculer U_1, U_2, U_3 .
- 2) Soit $W_n = U_n + \frac{1}{n+1}$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Vérifier que l'on a $W_3 = \frac{8}{27}$.
- 3) Exprimer (W_n) et (U_n) en fonction de n .
- 4) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 5 :

On considère la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 \in \mathbb{N} \\ U_{n+1} = \frac{U_n + a}{U_n + 1} \end{cases}$

Partie 1 : Dans cette partie on prend $U_0 = 1$ et $a = 0$.

- 1) Montrer que pour tout réel $n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$.
- 2) Soit (W_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $W_n = \frac{1}{U_n}$
 - a) Montrer W est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer alors U_n en fonction de n .

Partie 2 : Dans cette partie on prend $U_0 = 0$ et $a = \frac{1}{4}$.

- 1) Montrer que pour tout réel $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n < \frac{1}{2}$.
- 2) Etudier la monotonie de U .
- 3) Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = \frac{2U_n+1}{2U_n-1}$
 - a) Montrer V est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer alors U_n en fonction de n .
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 6 :

On considère la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{4 + 3U_n} \end{cases}$

- 1) Montrer que pour tout réel $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n \leq 4$.
- 2) Etudier la monotonie de U .
- 3) Montrer que pour tout réel $n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|U_n - 4|$.

- 4) En déduire que pour tout réel n de $\mathbb{N}$: $4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq U_n \leq 4$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- 5) Soit (S_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = n(3 - U_n)$
- Prouver que cette suite est géométrique
 - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 7 :

- Calculer la $n^{\text{ième}}$ terme U_n d'une suite géométrique de premier terme $U_1 = 4$ et de quatrième terme $U_4 = \frac{27}{16}$
- Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison -2 . Calculer U_7 et la somme des 7 premiers termes.
La suite (U_n) admet-elle une limite en $+\infty$.
- Soit (V_n) une suite géométrique de raison > 0 .
On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Calculer q , U_0 et n sachant que $U_2 = 2$, $U_4 = \frac{2}{9}$ et $S_n = 24$.

Exercice 8 :

- Une suite géométrique réelle (U_n) de premier terme non nul noté U_0 , admet pour raison un nombre réel non nul noté q .
 - Quelles valeurs peut prendre q sachant que $4U_3 = 49U_5$.
Dans la suite de cet exercice, q prend l'une ou l'autre des valeurs ainsi déterminées.
 - On note (S_n) la somme $\sum_{k=0}^n U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
Calculer (S_n) en fonction de U_0 , q et n .
 - Préciser U_0 et q sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 5$ et $U_0 < 4$.
- (U_n) désignant la suite déterminée au 1) a), on définit la suite (V_n) par $V_n = 7U_n - 25$.
 - Exprimer V_n en fonction de n .
 - La suite (V_n) est-elle convergente ? Si oui calculer sa limite.

Exercice 9 :

Soit la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 ; U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4}{3}U_n - \frac{1}{3}U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases}$$

- On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$
 - Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Exprimer V_n en fonction de n .
- On pose pour $n \geq 1$ $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$
 - Exprimer S_n en fonction de n .
 - En déduire U_n en fonction de n .
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 10 :

Soit a un réel donné ; On considère (X_n) et (Y_n) 2 suites numériques définies par :

$$\begin{cases} X_n = (a-1)Y_{n-1} \\ Y_n = -aX_{n-1} + (1-2a)Y_{n-1} \end{cases}$$

Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n = X_n + Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)

- a) Déterminer que (U_n) est une suite géométrique.
- b) Déterminer U_n en fonction de n et de a .

2) On considère dans cette question $0 < a < \frac{1}{2}$.

- a) Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n < 0$ et $Y_n > 0$?
- b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite.
- c) On considère la suite numérique (V_n) définie par $V_n = \frac{X_n}{Y_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \frac{a-1}{-aV_n+1-2a}$

En déduire la limite si elle existe de (V_n) .

- d) On pose $a = \frac{1}{3}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \frac{1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^{n-1}-1}$. En déduire limite de (V_n) .