Avril 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \quad xy'' + (1-x)\,y' - \lambda y = 0\,,$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

1- On admet qu'il existe une fonction f_λ, égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, telle que $f_\lambda(0) = 1$ et f_λ est solution dans l'intervalle $]-R, R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\,.$$

a) Sur l'intervalle $]-R, R[$, f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée première est la somme de la série dérivée

$$f'_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad x \in]-R, R[.$$

De même sa dérivée seconde est la somme de la série

$$f''_\lambda(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} \qquad x \in]-R, R[.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
0 =& x f''_\lambda(x) + (1-x)\,f'_\lambda(x) - \lambda f_\lambda(x)\\
=& x\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n x^n \qquad (1)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda)\,a_n\Big)\,x^n - \lambda + a_1\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne, $\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda)\,a_n\Big)\,x^n - \lambda + a_1 = 0$, pour tout $x \in]-R, R[$. D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par

$$a_1 = \lambda\,, \qquad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2}\,a_n\,, \quad \forall n \geqslant 1\,. \qquad (2)$$

On a donc que

$$a_1 = \lambda \quad \text{et} \qquad a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k+\lambda)}{(n!)^2}\lambda\,, \quad \forall n \geqslant 2\,.$$

En particulier, pour $\lambda = -2, -1, 0, 1$, on obtient

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,, \\ f_0 &= 1\,, \\ f_{-1}(x) &= 1 - x\,, \\ f_{-2}(x) &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\,. \end{aligned}$$

b) f_λ est un polynôme si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. D'après l'expression de a_n précédemment déterminée, on en déduit que f_λ est un polynôme si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + \lambda = 0$; d'où f_λ est un polynôme si et seulement si $-\lambda \in \mathbb{N}$. De plus, lorsque $\lambda = -p$, avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k-p)}{(n!)^2}(-p)$.
Si $p \geqslant 1$, alors $a_p = (-1)^{p-1}\frac{(p-1)!}{(p!)^2}(-p) = \frac{(-1)^p}{p!}$, et $a_n = 0$ pour $n \geq p+1$. Donc f_{-p} est un polynôme de degré p et de coefficient dominant $\frac{(-1)^p}{p!}$.
Le cas $\lambda = 0$ est traité dans la question précédente.

c) Supposons que $-\lambda \notin \mathbb{N}$, d'après **a)**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} = 0\,.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ, et qui prenne la valeur 1 en 0.

2- Dans cette question, on suppose que $\lambda = 1$:

$$E_1 : \quad xy'' + (1-x)\,y' - y = 0\,.$$

a) Posons $z = y' - y$. L'équation E_1 se transforme en une équation différentielle linéaire du premier ordre en z :

$$xz' + z = 0\,. \tag{3}$$

b) Sur $]0, \infty[$, l'équation (3) a pour solutions les fonction du type $x \mapsto ae^{-\int \frac{dx}{x}}$, soit $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
La fonction inconnue y satisfait alors $y' - y = \frac{a}{x}$; c'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre, mais non homogène.
Appliquons la méthode de variation de la constante : la recherche de solution y sous la forme $\varphi(x)\,e^x$, conduit à l'équation $\varphi'(x) = \frac{ae^{-x}}{x}$.
Finalement, on peut conclure que f_1 est une fonction du type

$$x \longmapsto ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt + be^x\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

c) La résolution sur $]-\infty, 0[$ est identique à celle de la question précédente. On obtient les solutions sous la forme

$$x \mapsto \alpha e^x \int_{-1}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

d) Le but de cette question est de résoudre l'équation différentielle E_1 sur $\mathbb{R}$.

(i) Au voisinage de 0, on a $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$. Il s'en suit que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ et lorsque $x \to 0$, on a : $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty\,,$$

de même,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty\,.$$

(ii) Si y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}$, sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution de E_1 sur $]0, +\infty[$, il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + be^x$. De même, sa restriction à $]-\infty, 0[$ est solution de E_1 sur $]-\infty, 0[$, il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x$.
De plus y est continue en 0, d'où si y est solution sur $\mathbb{R}$, alors nécessairement $a = \alpha = 0$ et $b = \beta$. La solution est donc de la forme $y : x \mapsto y(x) = \delta e^x$, $\delta \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, il est aisé de vérifier que les fonctions $x \mapsto \delta e^x$ avec $\delta \in \mathbb{R}$ sont solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : les solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \delta e^x$ avec $\delta \in \mathbb{R}$.

3- Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x)\ .$$

a) Les fonctions f_λ et $x \mapsto e^x$ sont deux fois continûment dérivables, il en est de même de la fonction g_λ et on a

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= e^x g_\lambda(-x)\,,\\ f'_\lambda(x) &= e^x \left(g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x)\right),\\ f''_\lambda(x) &= e^x \left(g_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g''_\lambda(-x)\right)\,, \end{aligned}$$

comme f_λ est solution de $E_\lambda : xy'' + (1-x)\,y' - \lambda y = 0$ sur $\mathbb{R}$, on a la relation :

$$-x\left(g_\lambda(x) - 2g'_\lambda(x) + g''_\lambda(x)\right) + (1+x)\left(g_\lambda(x) - g'_\lambda(x)\right) - \lambda g_\lambda(x) = 0\,,$$

ce qui donne

$$xg''_\lambda(x) + (1-x)\,g'_\lambda(x) + (\lambda - 1)\,g_\lambda(x) = 0\,,$$

ainsi, g_λ est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$xy'' + (1-x)\,y' - (1-\lambda)\,y = 0\,.$$

Ce qui signifie que g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_{1-\lambda}$.

b) La fonction g_λ est produit de deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$, donc g_λ est développable en séries entières sur $\mathbb{R}$, de plus g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_{1-\lambda}$ et on a $g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$.
Ainsi, g_λ est solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de $E_{1-\lambda}$ telle que $g_\lambda(0) = 1$. Il vient par l'unicité (admise dans l'énoncé) que $g_\lambda = f_{1-\lambda}$.
Conclusion : pour tous réels λ et x :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x)\,.$$

c) Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$. Or $p \geq 1 \Rightarrow -(1-p) \in \mathbb{N}$; d'après la question **I-, b)**, f_{1-p} est donnée par le polynôme

$$f_{1-p}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{p-1} a_n x^n ,$$

où $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1-p)}{(n!)^2} = (-1)^n \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!\,(n!)^2} x^n e^x ,$$

en particulier pour tout réel x :

$$f_2(x) = e^x + xe^x \quad \text{et} \qquad f_3(x) = e^x + 2xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x .$$

d) Soit p un entier supérieur ou égal à 1, alors pour tout réel x : $f_{p+1}(x) = e^x f_{-p}(-x)$ et $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$, de plus, f_{-p} et f_{1-p}, sont des polynômes de degré respectif p et $p-1$. Donc $R(x) = \frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \frac{f_{-p}(x)}{xf_{1-p}(x)}$ est une fraction rationnelle dont les polynômes du numérateur f_{p+1} et du dénominateur xf_{1-p} sont de même degré p. Il s'en suit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^p}{p!}x^p}{\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}x^p} = \frac{-1}{p} .$$

4- L'objet de la suite du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but soit φ la fonction, définie pour tout réel x, par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2\theta} d\theta .$$

Etant donné un entier naturel p, soit I_p l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta d\theta .$$

a) On a

$$I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2+2p}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta \left(1-\cos^2\theta\right) d\theta = I_p - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta \cos^2\theta d\theta ,$$

puis, par intégration par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta \cos^2\theta d\theta = \left[\frac{\sin^{2p+1}\theta}{2p+1}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+2}\theta}{2p+1} d\theta = \frac{1}{2p+1} I_{p+1} ,$$

d'où

$$I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p .$$

Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, une récurrence élémentaire permet d'établir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2(kp+1)} \frac{\pi}{2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)}{2^p\, p!} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} \frac{\pi}{2} .$$

b) *Relation entre les fonctions* φ **et** $f_{1/2}$:

(i) Nous utilisons les théorèmes de la continuité et de la dérivation sous le signe intégrale : considérons la fonction $\Psi_0 : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_0(\theta, x) = e^{x \sin^2 \theta} .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), la fonction $\theta \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ (resp. $x \mapsto \Psi_0(\theta, x)$) est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (resp. $\mathbb{R}$). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sup\limits_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\Psi(\theta, x)| \leq e^x$ et la fonction constante en θ égale à e^x est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème de la continuité sous le signe intégrale, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, les applications partielles $\theta \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ et $x \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ sont toutes les deux de classe C^1 respectivement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathbb{R}$. De plus, pour tous $(\theta, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$, $|\frac{\partial}{\partial x} \Psi_0(\theta, x)| \leq e^x$. De plus, la fonction constante en θ égale a e^x est intégrable sur l'interval fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale φ est de classe C^1 et

$$\varphi'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{x \sin^2 \theta} \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

On démontre par récurrence que $(\theta, x) \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$, φ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(e^{x \sin^2 \theta} \right) d\theta = \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \theta \, e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

(ii) Commençons par déterminer le développement en série entière de $x \mapsto e^{x \sin^2 \theta}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$e^{x \sin^2 \theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n ,$$

puisque $\sup\limits_{\theta \in [0, \pi/2]} \left| \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n \right| = \frac{x^n}{n!}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \theta}{n!} x^n$ est normalement convergente en θ et ceci pour tout x. Donc par intégration en θ, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n .$$

Posons $\alpha_n = \frac{I_n}{n!}$, alors

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3} = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{n + \frac{1}{2}}{(n+1)^2},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} ,$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite du développement (2) en série de $f_{1/2}$. Signalons d'autre part la différence entre les premiers termes : $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_0 = 1$.
On en déduit que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2} .$$

c) *Encadrement de $\varphi(x)$:*

(i) Il suffit de montrer que pour tout $u < 1$, $(1-u)e^u - 1 \leq 0$. On étudie alors la fonction $g : x \mapsto (1-x)\,e^x - 1$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -xe^x$ qui est positive sur $]-\infty, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$, de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$, $g(1) = -1$ et $g(0) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \leq 1$, $g(x) \leq 0$, ce qui montre que $e^x - \frac{1}{1-x} \leq 0$ si $x < 1$ (car $1 - x > 0$).

(ii) Existence de l'intégrale : puisque $x < 1$ la fonction $\theta \mapsto 1 - x\sin^2\theta$ ne s'annule pas et donc la fonction $\theta \mapsto \frac{1}{1-x\sin^2\theta}$ est définie continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui implique que $J(x)$ existe.
Pour calculer l'intégrale, on commence par utiliser les règles de Bioche, qui consiste à effectuer le changement de variable $t = \tan\theta$, ce qui est justifié par le fait que $\theta \mapsto \tan\theta$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$. On a

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 - x\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2(1-x)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t\sqrt{1-x})^2}.$$

Ensuite, on utilise le changement de variable $v = t\sqrt{1-x}$ et on obtient

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} \frac{dv}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left[\arctan v\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

(iii) Puisque la fonction exp est à valeurs strictement positives, on a pour tout réel x, $\varphi(x) \geq 0$. D'autre part, d'après la question **4-**, **c)**, (i), pour tout réel $x < 1$, $e^{x\sin^2\theta} \leqslant \frac{1}{1-x\sin^2\theta}$, d'où par croissance de l'intégrale, pour tout réel $x < 1$, $\varphi(x) \leqslant J(x)$.
Par conséquence, pour tout $x < 1$,

$$0 \leq \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

(iv) Le premier changement de variable $u = \sin\theta$, donne

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{xu^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

puis on pose $v = \sqrt{-x}u$, on obtient

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{x}}} dv.$$

Or $x \leqslant 0 \Rightarrow 1 + \frac{v^2}{x} \leqslant 1$, donc $\int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv \geqslant \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv$; de plus , puisque $x \leqslant -1$, on a $\int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv \geqslant \int_0^1 e^{-v^2} dv$. Posons $A = \int_0^1 e^{-v^2} dv$, $A > 0$, on peut conclure que pour tout réel $x \leqslant -1$,

$$\varphi(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

(v) Nous avons montré que $f_{1/2} = \frac{2}{\pi}\varphi$ et pour tout réel $x < 1$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ce qui implique

$$0 \leqslant f_{1/2}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad \forall x < 1,$$

d'où, par passage à la limite ($x \to -\infty$),

$$\lim_{x\to-\infty} f_{1/2}(x) = 0 \,.$$

Nous avons également montré que $\varphi(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}$ pour $x \leqslant -1$ ce qui justifie que φ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$.

5- Soit h la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-\frac{x}{2}} f_{1/2}(x) \,.$$

a) Rappelons que nous avons montré dans **4-**, **b)**, (ii) que $h(x) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta} d\theta$. Montrons que h est paire, soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(-x) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin^2\theta} d\theta = \frac{2}{\pi} e^{\frac{-x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x(1-\sin^2\theta)} d\theta = \frac{2}{\pi} e^{\frac{-x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos^2\theta} d\theta \,,$$

en effectuant le changemnt $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$, il vient

$$h(-x) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{-x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta} d\theta = h(x) \,,$$

d'où la parité de h.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\left(1-2\sin^2\theta\right)} d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos 2\theta} d\theta \,, \end{aligned}$$

puis par le changement de variable $t = 2\theta$, on obtient

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2}\cos t} dt \,.$$

La relation demandée est alors une conséquence imédiate de la parité de h :

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + h(-x)\right) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos\theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2}\cos\theta} d\theta \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\cos\theta\right) d\theta \,. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel positif x et tout réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{ch}\left(x\frac{\cos\theta}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2} e^{x\frac{\cos\theta}{2}} > 0$, donc

$$h(x) \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x\frac{\cos\theta}{2}} d\theta \,,$$

or pour $\theta \in [0, \pi/4]$, $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où

$$h(x) \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x\frac{\sqrt{2}}{4}} d\theta \geqslant \frac{1}{4} e^{x\frac{\sqrt{2}}{4}} \,.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty \,.$$

AVRIL 2015

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Pour tout entier $n \in N$, on définit l'intégrale $S(n)$ par : $S(n) = \int_0^1 (1+x)^n\, dx$

1. Calculer $S(n)$

$$S(n) = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$$

2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$, où C_n^k désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n.

$$S(n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k+1} = \frac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$$

Exercice n° 2

Soit f l'application définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour $x \geq -1$. Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1+x}} > 0$, donc la fonction est strictement croissante de $[-1, +\infty[$ sur R^+, $f(-1) = 0$, $\underset{x\to\infty}{Lim} f(x) = +\infty$.

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = \frac{1}{2}$. Etudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite si elle existe.

Montrons par récurrence la propriété suivante : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

Pour n=0, on a $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et la propriété est vérifiée.

On suppose que : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$. Comme f est strictement croissante, on a :

$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$, d'où la propriété à l'ordre n+1.

La suite étant croissante et majorée (par 1), elle est convergente et sa limite l vérifie l'équation : $f(l) = l$ ou encore : $l = \sqrt{\frac{l+1}{2}}$, d'où : $2l^2 - l - 1 = 0$ et l=1.

Exercice n° 3

1. Trouver une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{2t^2}{t^2-1}$

$\dfrac{2t^2}{t^2-1} = 2 + \dfrac{2}{t^2-1} = 2 + \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{-1}{t+1}$ et une primitive est égale à $2t + Ln|t-1| - Ln|t+1| + K = 2t + Ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| + K$

2. Trouver une primitive de $g(t) = \dfrac{\sqrt{1-t}}{t}$

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{t}dt = \int \frac{2x^2}{x^2-1}dx$ en posant $x = \sqrt{1-t}$. D'où d'après la question précédente, on obtient : $2\sqrt{1-t} + Ln\left|\dfrac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right| + K$

3. Soit $H(x)$ une primitive de $\dfrac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

   Montrer que
   $H(x) = -2Lnx\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(1-\sqrt{1-x}) + K$, où K est une constante.

$H(x) = \displaystyle\int \frac{Lnx}{\sqrt{1-x}}dx = \left[-2\sqrt{1-x}\,Lnx\right] - \int 2\sqrt{1-x}\,\frac{1}{x}dx$, ce qui donne l'expression demandée, où on peut enlever les valeurs absolues.

4. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}dx$, montrer que cette intégrale est convergente.

La fonction $\dfrac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}$ n'est pas définie en 0 et 1. On a une intégrale généralisée.

En 0, $\dfrac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}} \approx Ln\,x$ et $x^{1/2}\ Ln\,x \to 0$ et l'intégrale converge en 0.

En 1, on pose $t = 1-x$, $\dfrac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{Ln(1+t)}{\sqrt{t}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc on a la convergence en 1.

En conclusion, l'intégrale est convergente.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$

$$H(x) = -2Ln x\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(1-\sqrt{1-x}) + K$$

$$H(x) = -2Ln x(1-\frac{x}{2}+o(x)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(1-(1-\frac{x}{2}+o(x))) + K$$

$$H(x) = -2Ln x + xLn\, x(1+o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(\frac{x}{2}+o(x)) + K$$

$$H(x) = -2Ln x + xLn\, x(1+o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln x + 2Ln(\frac{1}{2}+o(1)) + K$$

$H(x) = xLn\, x(1+o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(\frac{1}{2}+o(1)) + K$, puis on passe à la limite :

$$\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 4 - 2Ln2 + K$$

6. Soit $I(\varepsilon, a) = \int_{\varepsilon}^{a} \frac{Ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Calculer $I(\varepsilon, a)$ et en déduire la valeur de *I*.

$$I(\varepsilon, a) = H(a) - H(\varepsilon)$$

$$I(\varepsilon,a) = -2Ln(a)\sqrt{1-a} + 4\sqrt{1-a} + 2Ln(1-\sqrt{1-a}) + 2Ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} - 4\sqrt{1-\varepsilon} + 2Ln(1-\sqrt{1-\varepsilon})$$

$$I = H(1) - H(0) = 4 - 2Ln2$$

Exercice n° 4

Pour une longueur de périmètre donnée, quelle est parmi ces trois figures : carré, rectangle, cercle, celle qui a la plus grande surface ?

Soit p le périmètre donné.

Pour un cercle, son périmètre est égal à $p = 2\pi R$ (R étant le rayon) et sa surface à $\pi R^2 = \pi \frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$

Pour un carré, sa surface est égale à : $\frac{p^2}{16}$ (le côté étant égal à $p/4$)

Pour un rectangle, son périmètre est égal à : $p = 2(L+l)$ où L désigne sa longueur et l sa largeur. Sa surface est égale à : $S = L\times l = L\times(\frac{p}{2} - L)$ et cette surface est maximale pour la valeur qui annule la dérivée de cette fonction concave à savoir $L = \frac{p}{4}$. Par conséquent la surface d'un rectangle est la plus grande quand c'est un carré et donc on ne compare que la surface du carré avec le cercle. Comme $16 > 4\pi$, $\frac{p^2}{4\pi} > \frac{p^2}{16}$ et le cercle a la plus grande surface.

Exercice n° 5

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle trois fois continûment dérivable en un point a.

Soit D le déterminant défini par : $D(a,h) = \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$

Calculer $\underset{h\to 0}{Lim}\ \dfrac{D(a,h)}{h^4}$

En faisant une soustraction de lignes, on obtient :

$$D(a,h) = \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 0 & f(a+h)-f(a) & f(a+2h)-f(a+h) \\ 0 & f(a+2h)-f(a) & f(a+3h)-f(a+h) \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant bien sûr par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$D(a,b) = \left[(f(a+h)-f(a))\times(f(a+3h)-f(a+h))\right] - \left[(f(a+2h)-f(a))\times(f(a+2h)-f(a+h)\right]$$

Puis on applique la formule de Taylor à chaque expression à l'ordre 3 au voisinage de a (l'ordre 3 suffit, car le déterminant sera en h puissance 4, ce qui correspond au dénominateur de la limite à calculer.

On a :

$$f(a+h)-f(a) = h\,f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + o(h^3)$$

$$f(a+2h)-f(a) = 2h\,f'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(a) + o(h^3)$$

$$f(a+2h)-f(a+h) = h\,f'(a+h) + \frac{h^2}{2} f''(a+h) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a+h) + o(h^3)$$

$$f(a+3h)-f(a+h) = 2h\,f'(a+h) + 2h^2 f''(a+h) + \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(a+h) + o(h^3)$$

Les termes en h^2 et h^3 s'éliminent, et le terme en h^4 est égal à : $f'(a)\times f^{(3)}(a) - \left(f''(a)\right)^2$

Donc $\underset{h\to 0}{Lim}\ \dfrac{D(a,h)}{h^4} = f'(a)\times f^{(3)}(a) - \left(f''(a)\right)^2$

Exercice n° 6

Soit f une application linéaire définie sur R^3 par :

$$f(x,y,z)=\frac{1}{14}(13x-2y-3z,-2x+10y-6z,-3x-6y+5z)$$

1. Déterminer le noyau de f.

$f(x,y,z)=0$ implique $13x-2y-3z=0,\ -2x+10y-6z=0,\ -3x-6y+5z=0$, soit $y=2x$ et $z=3x$. Le noyau est donc une droite engendrée par le vecteur de composantes (1, 2, 3).

2. Déterminer l'image de f.

L'image est le plan d'équation : $X+2Y+3Z=0$

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M associée à f dans la base canonique de R^3.

$Det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix} 13-14\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 10-14\lambda & -6 \\ -3 & -6 & 5-14\lambda \end{vmatrix}$. En ajoutant à la première colonne, deux fois la deuxième et trois fois la troisième, on obtient :

$Det(M-\lambda I)=-14\lambda\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 10-14\lambda & -6 \\ 3 & -6 & 5-14\lambda \end{vmatrix}$. On soustrait trois fois la première ligne à la troisième ligne :

$Det(M-\lambda I)=(-14\lambda)(14(1-\lambda))\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 10-14\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 14-14\lambda \end{vmatrix}$ et en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient : $Det(M-\lambda I)=-(14)^3\lambda(1-\lambda)^2$

Par conséquent 0 est une valeur propre simple et 1 une valeur propre double.

4. Expliciter la nature géométrique de l'application f.

On constate que le noyau est orthogonal à l'image et que $M^2=M$, il s'agit d'une projection orthogonale sur le plan d'équation $X+2Y+3Z=0$

5. Ecrire la matrice S, dans la base canonique de R^3, de la symétrie par rapport au plan d'équation : $X+2Y+3Z=0$

On écrit d'abord dans une base obtenue avec le noyau et l'image, plus précisément :

$e_1=(-2,1,0)$ et $e_2=(-3,0,1)$ forment une base du plan de symétrie, donc $S(e_1)=e_1$ et $S(e_2)=e_2$

$e_3=(1,2,3)$ est un vecteur orthogonal au plan de symétrie, donc $S(e_3)=-e_3$

Donc dans cette base, $S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}-2&-3&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ et son inverse : $P^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}-2&7&-6\\-2&-4&5\\1&2&3\end{pmatrix}$

Dans la base canonique $S_c=P\,S\,P^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}9&-4&-6\\-4&3&-12\\-4&-8&-1\end{pmatrix}$

6. Exprimer MS et SM (produits de deux matrices) dans la base formée par la réunion d'une base du noyau de f et de l'image de f.

On a : $S(e_1)=e_1, S(e_2)=e_2$, $S(e_3)=-e_3$ et $M(e_1)=e_1, M(e_2)=e_2$, $M(e_3)=0$

Par conséquent $MS=SM=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$