Durée : 05 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2008 **CLASSES DE PREMIÈRE**

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

EXERCICE 1 (03 points)

Pour un ensemble A ayant un nombre fini d'éléments, le cardinal de A désigne le nombre d'éléments de A ; il est noté $\text{card}(A)$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. N_n désigne l'ensemble des entiers naturels à n chiffres.

1. a- Calculer $\text{card}(N_3)$. **(0,5 point)**
   b- Combien d'éléments de N_3 ne contiennent pas de zéro ? **(0,25 point)**
   c- En déduire que le nombre d'éléments de N_3 qui contiennent au moins un zéro est 171. **(0,25 point)**

2. $N_{n,1}$ désigne l'ensemble des éléments de N_n qui contiennent un seul zéro.
   a- Calculer $\text{card}(N_{3,1})$ et $\text{card}(N_{4,1})$. **(0,5 point)**
   b- Calculer $\text{card}(N_{n,1})$. **(0,25 point)**

3. $N_{n,2}$ désigne l'ensemble des éléments de N_n qui contiennent exactement deux zéros.
   Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$\text{card}(N_{n,2}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 9^{n-2}$$ **(01,25 point)**

EXERCICE 2 (05 points)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan **(P)**, k est un réel différent de 0 et 1.

Pour tout point M du plan **(P)**, on désigne par P_M et Q_M ses projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

On note T_k l'application du plan dans le plan qui, au point M, associe le point M' tel que M' soit le barycentre des points pondérés (P_M,k) et $(Q_M,1-k)$.

1- On suppose : $k = 2$.
   Soit (Δ) la droite d'équation $y + 2x - 6 = 0$. (Δ) coupe l'axe des abscisses en I et l'axe des ordonnées en J.
   a- Tracer (Δ) puis construire les points I' et J', images de I et J par T_2. **(0,25 point)**
   b- Montrer que pour tout point M de (Δ), I', J' et M' sont alignés. **(0,5 point)**

2- Soit M un point de coordonnées (x, y).
Montrer que les coordonnées x' et y' de M' sont : $x' = kx$ et $y' = (1 - k)y$. **(0,25 point)**

3- Soit ($\mathcal{P}$)la parabole d'équation $y = x^2$ et M un point de ($\mathcal{P}$) d'abscisse non nulle.

a- Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles M' appartient à ($\mathcal{P}$) ? **(0,5 point)**

b- Si oui, préciser pour chacune de ces valeurs la position de M'. **(0,5 point)**

4- Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 3

a- Montrer qu'il existe une valeur unique de k pour laquelle l'image de (C) par T_k est un cercle. **(0,75 point)**

b- Quelle est la nature de T_k pour la valeur trouvée ? **(0,25 point)**

5- On note A_0 le point de coordonnées $(2,1)$ et on pose :

$A_1 = T_k(A_0)$; $A_2 = T_k(A_1)$; ...; $A_n = T_k(A_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

Soit (x_n, y_n) le couple de coordonnées de A_n.

a- Exprimer x_n et y_n en fonction de k et n. **(0,5 point)**

b- Déterminer l'ensemble des réels k tels que les suites (x_n) et (y_n) soient convergentes. **(0,25 point)**

On pose : $\overrightarrow{OS_n} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}$ et on suppose que $k \in \left]0,1\right[$

c- Calculer les coordonnées (X_n, Y_n) de $\overrightarrow{OS_n}$. **(01 point)**

d- Les suites (X_n) et (Y_n) sont-elles convergentes ? **(0,25 point)**

EXERCICE 3 **(06 points)**

Pour tout polynôme P , on considère le polynôme ΔP , défini pour tout réel x par :

$$\Delta P(x) = P(x + 1) - P(x)$$

1/ Calculer $\Delta P(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = 2x + 1$ b) $P(x) = x^2 - 4x + 6$ c) $P(x) = x^3$ **(03 x 0,25 point)**

2/ Vérifier que si P et Q sont deux polynômes, λ et μ deux réels, alors :

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta P + \mu \Delta Q$$ **(0,25 point)**

3/ Montrer que si P est un polynôme de degré n $(n \geq 1)$, alors, ΔP est un polynôme de degré $n - 1$. **(0,75 point)**
Montrer que la réciproque est vraie. **(0,5 point)**

4/ On note P_0 et P_1 les polynômes respectivement définis par :

$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(x) = x - 1$$

a) Vérifier que : $\Delta P_1 = P_0$ **(0,25 point)**

b) On admet qu'il existe un unique polynôme noté P_2 tel que : $P_2(1) = 0$ et $\Delta P_2 = P_1$

Déterminer $P_2(x)$. (*On pourra calculer* $P_2(2)$). **(01 point)**

.

Application : Soit n un entier naturel non nul

En écrivant l'égalité $\Delta P_2(k) = P_1(k)$ pour $k \in \{1, 2, ..., n+1\}$, montrer la formule suivante :

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$ **(01 point)**

5) On pose $\Delta^2 P = \Delta(\Delta P)$

a) Montrer que pour tout polynôme P de degré 2, on a :

$$\forall x \in IR,\ P(x) = P(1) + \Delta P(1) \bullet (x-1) + \frac{\Delta^2 P(1)}{2} \bullet (x-1)(x-2).$$ **(01 point)**

b) Trouver alors un polynôme P de degré 2 tel que :

$P(1) = -1, \quad P(2) = 9 \quad$ et $\quad P(3) = 21.$ **(0,5 point)**

EXERCICE 4 **(06 points)**

1- Soit O un point du plan et R un réel positif.

(C) est le cercle de centre O et de rayon R.

Calculer, en fonction de R, les réels c_3 et c_4, côtés respectifs d'un triangle équilatéral et d'un carré tous deux inscrits dans (C). **(01 point)**

2- Soit un polygone régulier à n côtés inscrit dans (C) avec $n \geq 3$. On note c_n le côté de ce polygone. P et Q étant deux sommets consécutifs de ce polygone, soient H le pied de la hauteur issue de O du triangle OPQ et I le point de rencontre de la demi-droite $[OH)$ avec (C). On pose $OH = \alpha_n$ et $HI = \beta_n$.

a- Démontrer les égalités suivantes :

$$(\alpha_n)^2 = R^2 - \frac{(c_n)^2}{4} \quad \text{et} \quad (c_{2n})^2 = (\beta_n)^2 + \frac{(c_n)^2}{4}$$ **(0,75 point)**

b- Calculer alors c_6, c_8 et c_{12}. **(0,75 point)**

3- Application à la recherche d'une approximation de $(c_n)^2$

a- Dans un repère orthogonal, placer les points A_n de coordonnées $\left(n ; \frac{R^2}{(c_n)^2}\right)$ pour les valeurs suivantes de $n : 3 ; 4 ; 6 ; 8.$ **(0,5 point)**

b- a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0.$

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Trouver les valeurs de a, b et c pour que la courbe représentant f dans le repère précédent passe par les points A_3, A_4 et A_6. **(0,75 point)**

c- Montrer que $f(8)$ est une valeur approchée de $\frac{R^2}{(c_8)^2}$ à 2.10^{-2} près. **(0,5 point)**

d- Jordanus Nemoaius (-1237) a proposé, dans son livre « De triangulis », l'approximation suivante de $(c_n)^2$, connue sous le nom de « formule indienne » :

.../... 4

$$\forall\, n \geq 3,\ \frac{R^2}{(c_n)^2} \approx \frac{1}{36}\left(n^2 - n + 6\right) \quad \text{soit} \quad (c_n)^2 \approx \frac{36}{n(n-1)+6}R^2.$$

Utiliser ce résultat pour trouver une approximation de c_5, c_7 et c_{11}. **(0,25 point)**

4- Application à la recherche d'une approximation de $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

a- Donner une mesure en radians de l'angle $\widehat{POI}$. **(0,25 point)**

b- En déduire : $\forall\, n \geq 3,\quad \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \approx \frac{3}{\sqrt{n(n-1)+6}}$. **(0,75 point)**

c- Utiliser ce résultat pour trouver une approximation de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ **(0,5 point)**