DEVOIR N°2-1 DU 1er SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

1) Démontrer que f est paire. Etudier sa variation.
2) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
3) Démontrer que f(x) peut s'écrire sous la forme $1+\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$ a et b étant des réels à déterminer.
4) Donner l'ensemble des primitive de f
5) Soit F la fonction définie par $F(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$
   a) Déterminer son ensemble de définition. Etudier sa variation.
   b) Démontrer que F est impaire. Calculer les limites aux bornes et préciser les asymptotes.
   c) Préciser la tangente à C_F à l'origine du repère.
   d) Calculer $F\left(\dfrac{3}{2}\right)$; $F\left(\dfrac{5}{2}\right)$; $F(4)$. Tracer C_F.
6) Soit (D) la droite d'équation $y=x+m$ où m est un paramètre réel non nul
   a) Démontrer que l'intersection de la droite (D) et de la courbe C_F comporte exactement deux points puis calculer leurs abscisses respectives x_1 *et* x_2 .
   b) Vérifier que x_1x_2 est indépendant de m.

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$

1) *Etude d'une fonction auxiliaire*

On considère d'abord la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

a) Montrer que si $0<x\leq 1,\ on\ a\ g(x)>1$
b) Calculer g(1) et g(2)
c) Montrer qu'il existe un réel strictement positif et un seul α tel que $g(\alpha)=0$
d) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2) *Etude de la fonction f*

a) Exprimer la fonction dérivée $f'\ de\ f$ à l'aide de g.
b) Etudier les variations de f.
c) α étant le réel introduit dans 1) c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$
d) Calculer les $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
e) Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe représentative de C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unités 2cm abscisse et 5cm ordonnée)

On fera figurer la tangente T au point d'abscisse 1.

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x+1}\right)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que si 0<x<1, alors $\frac{f(x)}{x}=-\frac{2}{(-x)}\ln(-x+1)-\frac{1}{x}\ln(x+1)$

   En déduire $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$. La fonction f est –elle dérivable au point $x_0=0$?
3) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   b) Calculer $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$. Que peut on en déduire?

   c) Etudier les variations de f.

   d) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

   e) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

   a) Montrer que g admet une application réciproque définie sur IR.

   b) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(0)$ et tracer $C_{g^{-1}}$