DEVOIR : Primitive et calcul Intégrale

EXERCICE 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^4 |t-1|dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tsintdx$; 4) $\int_0^1 t\sqrt{1-t}dt$;

5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xcosx-sinx}{x}dx$; 6) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{(2x^2+1)^2}}dx$

EXERCICE 2 :

Soit F la fonction définie sur $]-\infty ,1[$ par F(x)= x$\sqrt{1-x}$

1)a) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty ,1[$ et etudier la derivabilite de F en 1

b) Calculer F'(x) pour tout x de $]-\infty ,1[$.

2) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $]-\infty ,1[$ par g(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty ,1[$ par : h(x)= $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$

a) Exprimer h(x) en fonction de F'(x) et de g(x) .

b) En déduire une primitive H de h sur $]-\infty ,1[$.

c) Déterminer la primitive H_0 de h s'annulant en x= - 3

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par f(x)= $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1)a) Calculer la limite de f en +∞

b) Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

2) Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ telle que F'0)= 0 .On ne cherche pas a exprimer F(x)

a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0,+\infty[$?

c) Quelles sont les variations de F sur $[0,+\infty[$?

3) On définit sur $[0,+\infty[$ les fonctions H et K par : H(x)= F(x) – x et K(x)= F(x) - $\frac{2}{3}x$

a) Etudier sur $[0,+\infty[$, les variations de H et K

b) En déduire que, pour tout x ≥ 0 , on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq$ x

c) En déduire la limite de F en +∞ .

4)a) Démontrer que l'équation F(x) = π admet une solution unique $\propto$ sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

EXERCICE 4 :

1) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos(2t)\, dt = \frac{1}{4}$

2) On pose I = $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2(t) dt$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2(t) dt$

a) Calculer I + J.

b) Calculer I – J.

c) En déduire I et J.