SCIENCE EN HERBE **MATHS TERMINALE S1 & S3**

SERIE N°5-1: LES CONIQUES

Exercice 1 :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on définit les points A(1 ; 0), $\boldsymbol{B}\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{C}\left(\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ et la droite $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$

1) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{CG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABGC ?
2) On note $(\boldsymbol{\Gamma})$ l'ensemble des points M(x ;y) du plan qui vérifient la relation:
$$-\boldsymbol{MA}^2 + \boldsymbol{MB}^2 + \boldsymbol{MC}^2 = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1})^2$$
a) Montrer que B et C appartiennent à $(\boldsymbol{\Gamma})$.
b) Montrer que $(\boldsymbol{\Gamma})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{MG} = \sqrt{2}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{M}, (\boldsymbol{D}))$
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $(\boldsymbol{\Gamma})$. Représenter $(\boldsymbol{\Gamma})$.

Exercice 2 :

1) Reconnaitre et tracer les courbes planes $(\boldsymbol{\Gamma})$ d'équations :
a) $\boldsymbol{4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0}$
b) $\boldsymbol{4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0}$
c) $\boldsymbol{x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 5 = 0}$
d) $\boldsymbol{y^2 - 8x - 6y + 9 = 0}$
2) Soit (C) l'ensemble des point M(x ; y) dont les coordonnées vérifient :
$$16x^4 + 18y^4 + 72x^2\boldsymbol{y^2} - 1296y^2 = 0$$
a) Montrer que (C) est la réunion de deux coniques (C_1)et (C_2). (on remarquera que le membre de gauche est une différence de deux carrés)
b) Tracer (C) après avoir précisé les éléments caractéristiques de (C_1)et (C_2).
3) On désigne par (C_m) la famille de courbes d'équation : $mx^2 + (1-m)y^2 + m^2 - m = 0$
a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, la nature des courbes (C_m).
b) Pour quelle valeur de m, (C_m)est-elle un cercle ?
c) Soit M_0 un point du plan, discuter, suivant la position de M_0, le nombre de courbes de la famille passant par M_0.

Exercice 3 :

1) Résoudre dans l'ensemble des nombre complexes l'équation :
$z^2 - \frac{4}{sint}z + \frac{13}{sin^2t} - 9 = 0,\ \ t \in]0;\ \ \pi[$est un paramètre réel.
2) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$**,** on considère le point mobile M d'affixe : $z = \frac{2}{sint} + 3i\frac{cost}{sint},\ \ t \in]0;\ \pi[$.
a) Soit $(\boldsymbol{\Gamma})$ la trajectoire du mobile, démontrer que $(\boldsymbol{\Gamma})$ est une partie d'une courbe dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques. Préciser et construire $(\boldsymbol{\Gamma})$.
b) Calculer à l'instant t les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du mobile M et déterminer t pour que : $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\| = 3$

Exercice 4 :

On appelle $(\boldsymbol{\Gamma})$l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient :

$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0$. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on considère la transformation g du plan P dans lui-même, qui à tout point$M$ d'affixe z, associe le point $g(M)$ d'affixe jz.

1) Montrer que g est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
2) On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M de P d'affixe $z$vérifiant $Re(z^2) = 1$. Déterminer la nature de $\mathcal{H}$ et tracer $\mathcal{H}$.
3) Montrer le point M d'affixe z appartient à $(\mathbf{\Gamma})$si et seulement si, $Re((jz)^2) = 1$
4) Montrer que $\mathcal{H}$ est l'image de $(\mathbf{\Gamma})$par la transformation g. En déduire la nature de $(\mathbf{\Gamma})$et tracer $(\mathbf{\Gamma})$sur la figure précédente.

<u>Exercice 5 :</u>

Soit ABO un triangle isocèle du plan orienté tel que : $\left(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note H le milieu $[AB]$, I celui de $[OB]$ et (Δ) la médiatrice de $[AB]$. On note s la similitude plane directe de centre O transformant A en I, M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1- a) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s.
b)Construire le point C du plan tel que $s(C) = A$ .On justifiera la construction.
c) Exprimer AM' en fonction de CM.

2- On note M'' l'image de M par la réflexion d'axe (Δ). On se propose de déterminer l'ensemble $(\mathbf{\Gamma})$des points M du plan tels que A est équidistant de M' et M''.

a) Montrer que $AM'' = BM$.
b) Montrer que M appartient à $(\mathbf{\Gamma})$si et seulement si $CM = 2BM$.
c) Déterminer la nature de $(\mathbf{\Gamma})$, puis construire $(\mathbf{\Gamma})$.

<u>Exercice 6 :</u>

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'équation : $25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$, (1)

1) Interpréter géométriquement (1), démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice (D): $x = \frac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E).

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle$(\vec{u};\ \overrightarrow{OM})$.

2- a.) Déduire de (1) une relation du premier degrés entre OM et l'abscisse de M.
b.) Démontrer que $= \frac{16}{5+3cos\theta}$. (cette égalité est appelé équation polaire de (E))

3- On suppose que θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$. La droite (OM) coupe (D) en I et recoupe (E) en M'

a) démontrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est constante et indépendante de M.
b) Démontrer que $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$