SCIENCE EN HERBE **MATHS TERMINALE S1 & S3**

SERIE N°1-1: CALCUL VECTORIEL

Exercice 1:

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = a$ et $AC = 3a$ (avec $a > 0$). On fera une figure en prenant $a = 2cm$

1) Construire le barycentre G du système $\{(A;-5),\ (B;6),\ (C;2)\}$
2) Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 en fonction de a.
3) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant : $-5MA^2 + 6MB^2 + 2MC^2 = 12a^2$:
4) Déterminer et construire l'ensemble Γ' des points M du plan vérifiant : $\frac{MA}{MB} = 2$

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. On note A' le milieu de $[BC]$ et O le centre du triangle.

1- a) Déterminer l'ensemble (E) des réels m tels que les points A, B, C affectés respectivement des coefficients $m, 1, 1$ admettent un barycentre.
b)Quel est l'ensemble des barycentres obtenus lorsque m décrit (E) ?

2) Dans cette question on choisit $m = 2$
a) Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 ; 1. Placer les sur une figure les points A, B, C, O, A' et G
b) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

3)Dans cette question on choisit $m = -2$

Soit (D) l'ensemble des points M tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$. Préciser la nature de (D) et de son intersection avec (AA'). Tracer (D) sur la figure précédente.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle.

1) Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est le barycentre du système : $\{(A;\ tan\hat{A}), (B;\ tan\hat{B}), (C;\ tan\hat{C})\}$
2) Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est le barycentre du système : $\{(A;\ sin2\hat{A}), (B;\ sin2\hat{B}), (C;\ sin2\hat{C})\}$

Exercice 4:

Soit A et B deux points distinct du plan, M un point distinct de A et B. Pour tout réel α, on note (Γ_α) l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha[\pi]$

1) On suppose $\alpha = 0[\pi]$. Montrer que (Γ_0) est la droite (AB) privée des points A et B.
2) On suppose $\alpha \neq 0[\pi]$.
a) Démontrer que $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha[\pi]$ équivaut à $(cos\alpha)det(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) - (sin\alpha)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
b) On pose $AB = 2a$. montrer qu'il existe un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ dans lequel les points A et B ont pour coordonnées respectives $(-a\ ;\ 0), (a\ ;\ 0)$
c) Démontrer analytiquement que (Γ_α) est un cercle passant par A et B, privé des points A et B. Déterminer le centre Ω de ce cercle. Quel est le point Ω lorsque α vaut $\frac{\pi}{2}$?
d) Montrer que la tangente à (Γ_α) en A admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (cos\alpha)\vec{\imath} - (sin\alpha)\vec{\jmath}$. Déterminer l'angle $(\vec{u};\ \overrightarrow{AB})$ modulo π.
e) En déduire une construction géométrique du centre Ω de (Γ_α).
3) On note (Γ_α') l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha[2\pi]$, $\alpha \neq 0[\pi]$.
a) Montrer que $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha[2\pi]$ équivaut, pour tout M de (Γ_α) à la condition $(sin\alpha)det(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) > 0$.

b) En exprimant, à l'aide des coordonnées de M, cette condition, vérifier qu'elle détermine un demi- plan ouvert de frontière (AB).

c) Montrer alors que (Γ_α') est l'intersection de (Γ_α) avec le demi-plan d'équation $ysin\alpha > 0$.

Exercice 5 :

Soit (C) le cercle circonscrit à un triangle ABC.
L'objectif de l'exercice est de démontrer la propriété suivante : Un point M du plan appartient à (C) si et seulement si les projetés orthogonaux I, J et K de M sur les supports des côtés du triangle ABC sont alignés. *(La droite contenant les projetés de M est appelée **droite de Simson du point M**)*

1) On suppose que $M \in (C)$
a) Déterminer tous les quadruplets de points cocycliques de la figure.
b) En partant de l'égalité $(\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}) = (\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IM}) + (\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IK})[2\pi]$, montrer que $(\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}) = 0[\pi]$
2) Réciproquement on suppose que I, J et K alignés. Montrer que $M \in (C)$

Exercice 6 :

Soient A, B, C et D quatre points cocycliques, les points B et D se projettent orthogonalement sur (AC) respectivement en B' et C', les points A et C se projettent orthogonalement sur (BD) respectivement en A' et C'. Démontrer que les points A', B', C', D' sont cocycliques.

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle isocèle en A, P un point de (BC) distinct de B et C, (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. On note (C') le cercle tangent en B à (AB) passant par P. (C) coupe la droite (AP) en un point M.
On se propose de montrer que M est sur le cercle (C).

1) Montrer que : $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PM})[\pi]$ puis $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{MA})[\pi]$
2) En décomposant les angles et en utilisant l'égalité $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})[\pi]$ (que l'on justifiera), montrer que l'on a : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AM})[\pi]$. Conclure.

Exercice 8 :

ABC est un triangle quelconque, I est le centre de son cercle inscrit, J le centre de son cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ABC}$, K le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ACB}$. Le point A se projette orthogonalement en B_1 sur (IB), en B_2 sur (KB), en C_1 sur (IC), en C_2 sur (JC).

1) Montrer que A, B_1, I, C_1 sont cocycliques, ainsi que A, J, B_1, C_2 .
2) Calculer l'angle $(\overrightarrow{B_1C_1}; \overrightarrow{B_1C_2})$.
3) Montrer que B_1, B_2, C_1, C_2 sont alignés.

Exercice 9 :

On donne une droite (AB), un point M décrivant (AB) et un cercle fixe (C) passant par A et B. On considère le cercle (C_A) passant par A et M et tangent en A à (C) et le cercle (C_B) passant par B et M et tangent en (C). (C_A) et (C_B) se recoupent en N.
Soient (Δ_A) et (Δ_B) les tangentes respectives au cercle (C_A) en A et au cercle (C_B) en B.

1) (Δ_A) et (Δ_B) se coupe en C. Justifier que C est fixe.
2) Justifier que $(\overrightarrow{AC}\,; \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MN})[\pi]$
3) En déduire le lieu géométrique du point N lorsque M décrit (AB).

Exercice 10 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O: \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :
$\overrightarrow{OM'} = (\vec{u}.\overrightarrow{OM})\vec{\imath} + (\vec{\imath}.\overrightarrow{OM})\vec{u}$

1) Donner l'expression analytique de f. En déduire que f est une application affine.
2) Déterminer deux points A et B, distincts de O tels que : $f(A) = A$ et $\overrightarrow{Of(B)} = -4\overrightarrow{OB}$.
3) En déduire que f est une affinité orthogonale dont on précisera l'axe et le rapport.

Exercice 11 :

Soit $ABCD$ un losange et f l'application affine du plan définie par : $f(A) = A, f(B) = D$ et $f(C) = D$.

1-a) Déterminer les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan (P).

b)Démontrer que fof est une application constante.

2) Soit g la symétrie orthogonale d'axe (AC).

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application gof.

b) En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M du plan.

<u>Exercice 12 :</u>

Soit ABC un triangle et f l'application affine du plan définie par : $f(A) = B,\ f(B) = A\ \ et\ f(C) = C.$

1) Démontrer que $fof = Id$ (***on dit que f est involutive***)
2) Démontrer que le milieu I de $[AB]$ est invariant par f.
3) Démontrer que la droite (IC) est invariante par f.
4) Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante par f.
5) Construire l'image d'un point M du plan par f. On distinguera les cas :
   $M \in (IC), M \in (AC)\ et\ M \notin (IC) \cup (AC)$.

<u>Exercice 13:</u>

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = BD$. Soit f l'application affine du plan définie par :
f$(A) = B, f(B) = D$ et $f(D) = C$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Préciser la nature de l'application g définie par : $g = t^{-1}of$.
2) Construire l'image d'un point M du plan par f.
3) Démontrer que f n'a pas de point invariant.