SCIENCE EN HERBE MATHS TERMINALE S2 & S4 & S5

COMPOSITION N°1 DU 2nd SEMESTRE :

DUREE : 4H

Exercice 1 :

1) (E) : $y'' + 2y' + y = 0$
   a) Résoudre (E) dans IR.
   b) Déterminer la solution de (E) telle que : $y(0) = 0$ et $y'(0) = e$.
2) $f(x) = xe^{1-x}$
   a) Donner le tableau de variation de f .
   b) Montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$
   c) A l'aide de l'équation différentielle, déterminer l'ensemble des primitives de f .
3) $U_0 = 2; U_{n+1} = U_n e^{1-U_n}, n \in IN$
   a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*, 0 \le U_n \le 1$
   b) Montrer que U_n est croissante à partir du rang $n = 1$
   c) En déduire que U_n admet une limite et préciser sa limite
4) $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx, n \in IN$
   a) Calculer I_0 et I_1
   b) Montrer $\forall n \ge 1, I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ à l'aide d'intégration par parties.
   c) En déduire I_2 et I_3
   d) Calculer $I = \int_0^1 \left(-2x^3 - x^2 + 2x - 1\right) e^{1-x} dx$

Exercice 2 :

1) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u = 1 + j$
   a) Calculer $1 + j + j^2$ et j^3.
   b) Déterminer par récurrence que $u^{2n+1} = -j^{n+2}; n \in IN$.
   c) Exprimer u^{2n} en fonction de n et de j
   d) En déduire u^{24} et u^{31} sous forme algébrique
2) P $\left(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ repère orthonormé direct.

   $f : M(z) \mapsto M'(z')$ Tel que : $z' = 2uz + u - \frac{1}{2}$
   a) Montrer que f admet un point invariant I .
   b) $M \neq I$, calculer IM' en fonction de IM et calculer $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right)$
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
   d) M étant donné. Construire M' et en déduire la nature du triangle IMM' (justifier).
3) On pose $d_n = M_n M_{n+1}$ avec $M_n(z_n); M_{n+1}(z_{n+1}); z_{n+1} = f(z_n)$ et soit $M_0(2i)$

a) Calculer d_0

b) Exprimer d_{n+1} en fonction d_n .

c) Calculer en fonction de n la somme $l_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} l_n$

<u>Probléme :</u>

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln|x|}{x+1} & si\ x \in]-\infty;1] - \{-1\} \\ f(x) = (x^2 - x)e^{-\frac{1}{x-1}} & si\ x \in]1;+\infty[\\ f(0) = 0;\ f(-1) = 1 & \end{cases}$$

A)

1) Vérifier que D_f =IR et exprimer $f(x)$ sans la valeur absolue.
2) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3) Etudier la continuité de f en $x = 0;\ x = -1 \quad et \quad x = 1$
4) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0\ et\ x = 1$. Interpréter.
5) Préciser la nature des branches infinies de (C_f).

B)

1) Soit $h(x) = \ln|x| + x + 1$. Donner le tableau de variation de h.
2) Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution α différente de -1et vérifier que $0,27 \prec \alpha \prec 0,28$.
3) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
4) a) Sur $]-\infty;1] - \{-1\}$ calculer $f'(x)$ et préciser son signe
   b) Calculer $f'(x)$ sur $]1;+\infty[$.
5) Donner le tableau de variation de f .
6) a) Préciser les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec (ox)
   b) Tracer (C_f) (unité 1cm).

C)

1) a) Déterminer les réels a et b tel que : $\dfrac{x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$
   b) En déduire une primitive de : $x \to \dfrac{x}{x+1}$
2) $0 \prec \lambda \prec 1$, à l'aide d'intégration par parties calculer

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \times f(x)dx$$

3) Calculer $\lim_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$.