SCIENCE EN HERBE — MATHS TERMINALE S2 & S4 & S5

SERIE N°1-1 : NOMBRE COMPLEXE

Exercice 1 :

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$Z_1 = (1+i)(1-2i)$; $Z_2 = (1-i)^2$; $Z_3 = (1+i)^8$; $Z_4 = (1+i)^{1999}$; $Z_5 = (1-i\sqrt{2})^3$

$Z_6 = \dfrac{3-4i}{7+5i}$; $Z_7 = \dfrac{1+2i}{3-i\sqrt{3}}$; $Z_8 = \dfrac{1+i}{2i}$; $Z_9 = (\dfrac{1+i}{1-i})^3$; $Z_{10} = \dfrac{3+2i}{1-i}(2+i)$

$Z_{11} = \dfrac{4-i}{1+3i} + \dfrac{i}{3-i} - \dfrac{3-4i}{2+i}$; $Z_{12} = (\sqrt{2}+i)^4 - (2\sqrt{2}+3i)^2$; $Z_{13} = (\dfrac{2-i}{3+i})^3$

Exercice 2 :

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1+3i$; $Z_2 = 3-4i$; $Z_3 = -1+7i$; $Z_4 = (1+i)^2$; $Z_5 = (-5+3i)^2$

$Z_6 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $Z_7 = (\sqrt{3}+i)(5+i\sqrt{11})$; $Z_8 = \frac{5+i}{3+2i}$; $Z_9 = \frac{5}{(1+2i)^2}$

$Z_{10} = (\frac{\sqrt{3}-i}{1+i})^3$; $Z_{11} = \cos x + i\sin x$; $Z_{12} = 2(\cos x - i\sin x)$

Exercice 3 :

Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1+i\sqrt{3}$; $Z_2 = -\sqrt{3}+i$; $Z_3 = 2(-1-i)$; $Z_4 = \sin\theta + i\cos\theta$; $Z_5 = 1 + i\tan\theta$

$Z_6 = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$; $Z_7 = \dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}$; $Z_8 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $Z_9 = \dfrac{-1+3i\sqrt{3}}{10-2i\sqrt{3}}$; $Z_{10} = e^{i\theta}+1$

$Z_{11} = e^{i\theta} - 1$; $Z_{12} = \sin\alpha + 2i(\sin\dfrac{\alpha}{2})^2$

Exercice 4 :

A) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel

1) $z' = z^2 - 2\bar{z} + 1$; 2) $z' = (\bar{z}-3)(iz+2)$; 3) $z' = (z-2)(\bar{z}-i)$; 4) $z' = i\frac{1+z}{1-z}$;

B) Détermine l'ensemble des points M(z) tel que z' soit imaginaire

1) $z' = (z-i)(2iz+3)$; 2) $z' = (z-1)(\bar{z}-i)z$; 3) $z' = (\bar{z}-2)(z-i)$; 4) $z' = \frac{z-2i}{2z-1-i}$

C) Détermine l'ensemble des points M(z) tels que

1) $|z-2| = |z-i|$; 2) $|iz+3| = |z+4+i|$; 3) $\left|\bar{z}+\frac{1}{3}\right| = 3$; 4) $|1+i\bar{z}| = 2$;

5) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$; 6) $\arg(-z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$; 7) $arg(z-2i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$; 8) $\arg\left(\frac{1}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

9) $\arg(z^2-4) = \arg(z+2)[2\pi]$; 11) $Re(\frac{z-1}{z-i}) = 0$; 12) $Im(\frac{z-1}{z-i}) = 0$; 13) $Re(z^3) = Im(z^3)$

D) Détermine analytiquement puis géométriquement l'ensemble des points M(z) tels que

1) $|2iz-1|$=4 ; 2) $|2iz+2+i|=|3+2i-z|$

Exercice 5 :

Soit $J=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Calculer J^2, J^3 et $1+J+J^2$
2) Soit(E) l'équation $z^4+z^2+1=0$
   a) Vérifier que J est solution de (E) .
   b) Déduire de ce qui précède une factorisation dans R de $P(x)$=x^4+x^2+1 .

Exercice 6 :

On considère le nombre complexe $=\frac{ai+4b}{5+3i}$, ou a et b sont des nombres réels.

1) Déterminer a et b sachant que $|V|=1$ et $\arg(V)=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.
2) Calculer $V^{12}+V^{16}$.

Exercice 7 :

Soit θ un nombre réel tel que $0\leq\theta\leq\pi$. On considère le nombre complexe
$Z=-\sin 2\theta+2i(\cos\theta)^2$.

1) Déterminer le module et l'argument de Z en fonction de .
2) Déterminer θ pour que Z et $1-Z$ aient le même module.

Exercice 8 :

1) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2) Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.
3) Linéariser la fonction f dans chacun des cas suivants :
   a) $f(x)=sin^3x$; b) $f(x)=cos^4x$; c) $f(x)=(\sin x)^4(\cos x)^2$
   d) $f(x)=sin^6x$; e) $f(x)=\sin(3x)\cos(4x)\cos(5x)$

Exercice 9 :

On considère les nombres complexes : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_2=1-i$ et $z=\frac{z_1}{z_2}$

1) Mettre z_1, z_2 et z sous forme trigonométrique puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2) Résoudre dans R l'équation $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2$ puis placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique .

Exercice 10 :

Résoudre dans C les équations suivantes :

1) $z^2+3z+5=0$; 2) $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$; 3) $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$

4) $z^2-2iz-i\sqrt{3}=0$; 5) $(1-i)z^2-2z-11+3i=0$; 6) $z^2-4z+5=(z+1)^2$

7) $z^2-(5-i\sqrt{3})z+6-3i\sqrt{3}=0$; 8) $z^2-2\bar{z}=0$; 9) $z^8+z^4+1=0$

10) $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$

Exercice 11 :

1) Résoudre dans C $(z^2-4z+5)+i(z+1)=0$.
2) Résoudre dans C $(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$.
   En déduire qu'il existe des réels a, b, c et d qu'on déterminera tels que $\forall\ x \in R$:
   $(x^2-4x+5)^2+(x+1)^2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$.

Exercice 12 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Développer le réel $(1+\sqrt{3})^2$ et en déduire la résolution de $z^2+\left(1+\sqrt{3}\right)z+2+\sqrt{3}=0$.
2) On pose a=$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)\ \ et\ \ b=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$
   Soit A(a) et B(b)
   a) Ecrire a et b sous la forme trigonométrique.

   b) Donner la nature du triangle OAB.

Exercice 13 :

1) Résoudre dans C $Z^2+3\bar{Z}=\left(2+i\sqrt{3}\right)|Z|$
   Représenter les images des solutions de cette équation dans un plan rapporte a un repère orthonormal direct .
2) Résoudre dans C $4Z^2+8|Z^2|-3=0$
   Mettre sous forme trigonométrique la somme de 2 solutions quelconques.

Exercice 14 :

On donne le nombre complexe $Z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1) Exprimer Z^2 sous la forme algébrique.
2) Exprimer Z^2 sous la forme exponentielle.
3) En déduire Z sous forme exponentielle.
4) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.