SCIENCE EN HERBE **MATHS TERMINALE S1 & S3**

SERIE N°1-1: PROBABILITE

Exercice 1 :

On considère le système d'inconnu $(x\,;y)$ dans IR^2 :

$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$, a, b et$c$ sont des paramètres réels.

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le premier numéro donne a, le second b et le troisième c.

Calculer les probabilités :

a) p_1 pour que le système ait une infinité de solution.
b) p_2 pour que le système n'ait aucune solution
c) p_1 pour que le système ait une unique solution.
d) p_1 pour que le système ait pour solution (3 ; 0)

Exercice 2 :

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note A l'évènement contraire de l'évènement A et $p(A\,/\,B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.

On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».

Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'évènement : «Le premier élève appartient au club théâtre».Calculer $p(T_1)$.

b. On appelle T2 l'évènement «L'élève pris en photo appartient au club théâtre».

Calculer $p(T_2/T_1)$, puis$(T_2/\overline{T_1})$. En déduire $p\,(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$.

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 3 :

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'évènement « l'urne a est choisie » , B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

a. Déterminer les probabilités suivantes : $p\,(A)$, $p_A(R)$, $p(A \cap R)$.

b. Montrer que$p(R) = \frac{13}{30}$

c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit a ?

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.

a. Exprimer $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de n.

b. Démontrer que : $p(R) = \frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$

c. On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de p (R).

<u>Exercice 4 :</u>

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40% ont leurs faces marquées d'un cercle, 20% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20% ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0{,}12+0{,}004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un Cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?

2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?

3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

<u>Exercice 5 :</u>

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Placer dans le plan muni du repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;

B « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».

3. a. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme x^2+y^2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
Calculer son espérance mathématique E(X).

b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\frac{4}{9}$

4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement

et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.
Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :
C : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi $n$points du plan.
Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

<u>Exercice 6 :</u>

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.
Pour tout entier naturel non nul, on note R_nl'évènement « le joueur réussit le n-ième service » etR_nl'évènement contraire.
Soit $x_n$la probabilité de$R_n$et $y_n$celle deR_n.
La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées
— si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ;
— si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.
1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.
Soit Xla variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.
a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)
b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
2. On s'intéresse maintenant au cas général.
a. Donner les probabilités conditionnelles $p(R_{n+1}/R_n)$ et $p(R_{n+1}/\overline{R_n})$
b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :$x_{n+1} = 0{,}1x_n + 07$
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.
a. Déterminer la nature de la suite (u_n).
b. En déduire la limite de la suite (x_n).

<u>Exercice 7 :</u>

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

<u>Partie A</u>

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

<u>Partie B</u>

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.
1. On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.
Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$.
2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.
L'espace est muni d'un repère$(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$orthonormal.
Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (15 ; 0 ; 0), (0 ; 15 ; 0) et (0 ; 0 ; 15) et soit M le point de coordonnées (n, b, r).
a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.
b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).
c. Démontrer que $g(n, b, r)$=$g(n, b, r) = \frac{1}{210}(OM^2 - 15)$
d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

<u>Proposée Par Mr SARR</u>

e. En déduire tes valeurs de n, bet r afin que la probabilité $g\ (n, b, r\ )$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à$\frac{2}{7}$

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit$\frac{2}{7}$

Un joueur mise $x$euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit $k$fois le montant de sa mise,avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien. On note Xla variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.

2. Déterminer la valeur de $k$pour laquelle le jeu est équitable.

Exercice 8 :

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machineM_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.
On note les évènements suivants :
• H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
• V : « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
• D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
• N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».
Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.
En déduire que la probabilité de N est égale à$\frac{19}{21}$

2. On considère la variable aléatoire Xdéfinie par :
• $X\ =\ 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
• $= \alpha$, lorsque D est réalisé ;
• $X\ =\ -2$, lorsque N est réalisé.
Déterminer αpour que l'espérance de Xsoit nulle.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machineM_1est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.
On note Δl'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».

a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p(H/\Delta)$ puis de même, d'avoir un alignement vertical $p(V/\Delta)$, d'avoir un alignement en diagonale $p(D/\Delta)$.

b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à$\frac{3}{28}$

4. A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$
Calculer les probabilités suivantes : $p(A/\Delta),\ p(A)$.