SERIE N°1-1 : LIMITES, CONTINUITES ET DERIVATION

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1+x-2x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$ 7) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

8) $\lim\limits_{x\to0}x(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2)$ 9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{x}}$ 11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{2x}$

12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos 2x}$ 13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\cos x}{2+\sin x}$ 15) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

Exercice 2 :

On sait que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

1) On considère la fonction $f: x\to\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

Déterminer que $f(x)=\frac{2(\sin x)^2}{x^2}$ et déterminer $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

2) En déduire que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin 4x}{2x^3}$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants déterminer Df puis étudier la continuité en x_0.

1) $\begin{cases} f(x)=x^2-x-2 \ si\ x\leq 2 \\ f(x)=\frac{x-2}{x^2-1} \ si\ x>2 \end{cases}$ $x_0=2$; 2) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} \ si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \ si\ x=0 \end{cases}$ $x_0=0$

3) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{-x^3}}{x}-2 \ si\ x>0 \\ f(x)=\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x} \ si\ x>0 \\ f(0)=-2 \end{cases}$ $x_0=0$; 4) $f(x)=|x^2-x|$ $x_0=0, x_0=1$

5) $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \ si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ $x_0=0$

Exercice 4 :

On considère la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x)=2x+3 \ si\ x\leq -5 \\ f(x)=x^2+a \ si\ -5<x\leq 2 \\ f(x)=2x^3+5x^2+bx+1 \end{cases}$$

Déterminer les nombres a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants peut-on f par continuité en a ? Si oui déterminer ce prolongement noté .

1) $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-1}$ $a = \frac{1}{2}$, 2) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x}$ $a = 1$

3) $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$ $a = 0$, 4) $f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{3x^3}$ $a = 0$

Exercice 6 :

Soit la fonction définie par $h(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

1) Déterminer le domaine de définition de h puis calculer les limites de h aux bornes de Dh.
2) Démontrer que h admet un prolongement par continuité en 4 noté g. Déterminer$g$.
3) Soit k la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} k(x) = h(x) \; si \;\; x > 4 \\ k(x) = x + h(x) \; si \;\; x \leq 4 \end{cases}$$

Déterminer le nombre réel a pour que k soit continue sur R.

Exercice 7 :

Soient a et b deux nombres réels et f la fonction définie par $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x(x+1)}$

1) Déterminer les limites éventuelles de f $en\ 0, -1,\ en + \infty\ et\ en - \infty$.
2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité $en\ 0, -1$? Si oui quel est le prolongement?

Exercice 8 :

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x-1} \; si \; x \in \,]-\infty, -1[\\ f(x) = x^2 - 1 \; si \; x \in [-1,0] \\ f(x) = 2\sin(x-1) \; si \;]1, +\infty[\end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f $en\ 1\ \ et\ en - 1$.
2) Etudier la dérivabilité de f $en\ 1\ \ et\ en - 1$.

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer de la dérivée la fonction f.

1) $f(x) = \sin(x - x^2)$, 2) $f(x) = \cos(x^2 + 3x)$ 3) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{4})$

4) $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$, 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Exercice 10 :

1) On donne $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x}$
   a) Calculer $f(x)$ et dresser le tableau de dérivation.

b) Montrer que la droite d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique a Cf. Construire Cf et ses asymptotes.

2) On donne $f(x) = x + \sqrt{x}$

a) Trouver Df puis calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer Cf.