ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

«Dans la conclusion de son ouvrage, Mutations de la famille africaine, L'Harmattan, 2010, Céline Kula-Kim, sociologue originaire du Congo constate :
"Une nouvelle impulsion de la famille africaine qui oscille maintenant entre deux mondes : le monde traditionnel et le monde moderne". Explicitez cette affirmation.

Sujet n° 2

Les frontières aujourd'hui, une réalité vouée à disparaître ou à se renforcer ?

Sujet n° 3

«Le courage est une vertu démocratique», que pensez-vous de cette affirmation de Cynthia Fleury, philosophe, tirée de La Fin du courage, Fayard, 2010 ?

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle "partition de l'entier n en k éléments" la donnée de k entiers naturels $(a_1, \ldots, a_k)$ tels que $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on note $p_k(n)$ le nombre de partitions de l'entier n en k éléments :

$$p_k(n) = Card\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 + \cdots + a_k = n\}.$$

où $Card$ est la notation pour le cardinal d'un ensemble (c'est-à-dire le nombre d'éléments composant un ensemble). On note également

$$r_k(n) = Card\{(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}^k : b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + kb_k = n\}.$$

Enfin, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\mathcal{R}_k$ de la variable complexe z par

$$\mathcal{R}_k(z) = \sum_{n \geq 0} r_k(n) z^n.$$

On admet que pour tous nombres complexes α et z tels que $|\alpha z| < 1$

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)^k} = \sum_{n \geq 0} C_{n+k-1}^{k-1} \alpha^n z^n,$$

où $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ représente le k-ième coefficient binomial d'ordre n.

1.1 Partitions entières pour $k = 2, 3$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $r_k(n) \leq \dfrac{p_k(n)}{k-1}$.
2. Calculer $r_2(n)$, $p_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

4. En utilisant l'égalité

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = 1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6,$$

   valable pour tout complexe z, montrer que pour tout $n \geq 6$, on a

$$r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6) = 0.$$

5. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{17}{72}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-jz} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}.$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_3(n) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}.$$

7. En déduire que $r_3(n) = E\left[\dfrac{(n+3)^2}{12}\right]$ où $E[x]$ est l'entier le plus proche de x, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $|x - n| \leq |x - p|$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   Par exemple, $E[6.8] = 7$ *et* $E[2.5] = 2$.

1.2 Séries entières rationnelles

Soit $S(z)$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$:

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{pour } |z| < r.$$

On admet le théorème suivant :
La série entière $S(z)$ coïncide avec une fonction rationnelle $F(z)$ de la forme $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont deux fonctions polynômes telles que Q ne s'annule pas dans le disque ouvert $D(0,r)$ de rayon r, lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}^{q+1}$ (non tous nuls) tels que pour tout $n \geq d$, $\lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \cdots + \lambda_q a_{n+q} = 0$.

On dit alors que la fonction rationnelle est définie par :
– les conditions initiales : c'est-à-dire la donnée de $q+d$ nombres $(a_0, a_1, \ldots, a_{d+q-1})$
– et la relation de récurrence linéaire donnée par les $q+1$ coefficients $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.

On admet que deux fonctions rationnelles sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Elles sont donc égales si et seulement si les conditions initiales et la relation de récurrence sont identiques.

8. Soit $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fonction rationnelle telle que Q ne s'annule pas dans dans le disque ouvert $D(0,r)$, avec $r > 0$. Ses conditions initiales sont constituées de $q+d$ nombres. Montrer qu'il existe une fonction polynôme S de degré $d-1$ tel que
$$F(z) = S(z) + z^d G(z) \text{ pour tout } z \in D(0,r),$$
où G est une fonction rationnelle possédant la même relation de recurrence que F, mais dont les conditions initiales ne sont constituées que de q nombres.

La question précédente permet de se limiter au cas $d = 0$. Dans toute la suite du problème, on considérera qu'on est toujours dans ce cas et on notera encore F une telle fonction rationnelle. Les conditions initiales permettent alors de définir la famille de polynômes suivante
$$P_0(X) = 0 \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, q\}, \quad P_k(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n.$$
On note également $R(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i}$ le polynôme associé à la relation de reccurence.

9. Montrer que $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i} P_i(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à q.
10. Montrer que $\lambda_q \left(P_q(X) - F(X)\right) = \lambda_0 X^q F(X) + \displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} \left(\lambda_j X^{q-j} \left[F(X) - P_j(X)\right]\right)$.
11. En déduire que $F(X) = Q(X)/R(X)$.
12. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que
$$R(X) = (1 - \xi_1 X)^{m_1} \ \cdots \ (1 - \xi_r X)^{m_r}.$$
13. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de Q/R, montrer qu'il existe une famille $\Big((b_{i,j})_{j=1,\ldots,m_i}\Big)_{i=1,\ldots,r}$ telle que
$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} C_{n+j-1}^{j-1} \xi_i^n.$$

Afin de trouver un équivalent de a_n, on ne conserve de la somme précédente que la valeur ξ_i de plus grand module et le terme polynomial de plus haut degré (c'est-à-dire pour $j = m_i$). Dans le cas de plusieurs racines de même module maximal, on ne garde que celle de plus grande multiplicité.

14. Soit i_0 l'indice du ξ_i de plus grand module (ou de plus grande multiplicité en cas de plusieurs racines de même module maximal). Montrer qu'un équivalent de a_n s'écrit sous la forme suivante

$$a_n \sim b_{i_0,m_{i_0}} \xi_{i_0}^n \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}.$$

15a. On considère la fonction rationelle $\tilde{F}$ définie par les conditions initiales (1,1,2,3,4,5) et la relation de récurrence (-1,1,1,0,-1,-1,1). Trouver une expression explicite de la fonction $\tilde{F}$ en fonction de $\mathcal{R}_3$.

15b. En utilisant la question 14, montrer qu'un équivalent du n-ième coefficient de $\tilde{F}$ (noté $a_n(\tilde{F})$) est donné par

$$a_n(\tilde{F}) \sim \frac{n^2}{12}$$

Ce résultat est-il en conformité avec le résultat de la question 8 ?

1.3 Partitions entières pour k quelconque

16. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\mathcal{R}_k(X) = \dfrac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ puis

$$\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z^k}.$$

17. En déduire que

$$r_k(n) = r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots$$

où on utilise la convention : $r_k(n-ik) = 0$ si $n < ik$.

18. En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto x^{k-1}$ est convexe, montrer que pour tout $k \geq 2$

$$x^{k-2} \geq \frac{1}{k(k-1)} \left(x^{k-1} - \max\left\{ (x-k)^{k-1} ; 0 \right\} \right), \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

19. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$r_k(n) \geq \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

2 Problème d'algèbre linéaire

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$q(x) = \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E, on note $U \oplus V$ l'espace qui est la somme directe de U et V, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $U+V$ sous la condition $U \cap V = \{0\}$.

2.1 Diagonalisation

1. Soit q une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ (appelée forme polaire de q) telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout x de E. Vérifier en particulier que
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)).$$

On dit que la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie positive) si, pour tout x de E, $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. si, pour tout $x \neq 0$, $\varphi(x, x) > 0$). On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$.

2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = {}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P.$$

Dans la suite du problème, on appelle rang de la forme quadratique q (associée à la forme bilinéaire symétrique φ) le rang de la matrice de φ dans une base de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ (ou de façon équivalente pour la forme quadratique associée q) si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Etant donnés x et y deux vecteurs de E, on note $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\varphi(x, y)$ en fonction des x_i et des y_i.
4. Soit f_1 un vecteur de E tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. On note $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie pour tout x de E par $\varphi_1(x) = \varphi(f_1, x)$, et $F = \ker(\varphi_1)$. Montrer que $E = \mathbb{R}f_1 \oplus F$ où $\mathbb{R}f_1$ désigne le sous espace vectoriel de E de dimension 1 engendré par f_1.
5. En déduire que toute forme bilinéaire symétrique sur E admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
6. Déterminer une telle base pour la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par
$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$
(On pourra commencer par préciser la forme bilinéaire symétrique φ associée à q et la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$).
7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E et deux entiers p et q tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & -J_q & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
où J_r désigne une matrice identité de taille $r \times r$.

2.2 Sous-espaces totalement isotropes

On appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique φ (noté ker (φ)) le noyau de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. On dit que φ est non-dégénérée si ker $(\varphi) = \{0\}$.

On dit que la forme bilinéaire φ est positive (resp. négative) si pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. $\varphi(x, x) \leq 0$). On dit que la forme bilinéaire φ est définie si elle vérifie la proposition suivante

$$\varphi(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

On appelle signature de φ le couple d'entiers $(n_+; n_-)$ où n_+ est la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel F de E tel que la restriction de φ à F soit définie positive, et n_- la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel G de E telle que la restriction de φ à G soit définie négative.

Dans les questions suivantes, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale pour φ, et $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p + 1, \ldots, p + q$, et $\alpha_i = 0$ sinon.

8a. Montrer que $p \leq n_+$.

8b. Soit F_+ un sous-espace vectoriel de E de dimension n_+ tel que la restiction de φ à F_+ (notée $\varphi|_{F_+ \times F_+}$) soit définie positive, et $G =$ Vect $(e_{p+1}, \ldots e_n)$. Montrer que F_+ et G sont en somme directe. En déduire que $n_+ \leq p$.

8c. En déduire le théorème de Sylvester : Dans toute base orthogonale de E, la matrice de φ possède n_+ éléments strictement positifs et n_- éléments strictements négatifs.

9. Exprimer le rang de φ en fonction de sa signature, et déterminer la signature d'une forme bilinéaire définie positive.

On appelle cône isotrope de la forme quadratique q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\}.$$

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique φ si $\varphi(x, y) = 0$. Pour A une partie de E, on appelle orthogonal de A selon φ l'ensemble

$$A^{\perp} = \{y \in E, \forall x \in A \quad \varphi(x, y) = 0\}.$$

10a. Montrer que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

10b. Montrer que pour toute partie F de E, on a

$$F \subset F^{\perp\perp}.$$

10c. Montrer que pour A et B deux parties de E on a l'implication suivante

$$A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

On appelle sous-espace totalement isotrope (SETI en abrégé) un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout x de F, $q(x) = 0$. On appelle SETI maximal (SETIM en abrégé) un sous espace totalement isotrope G vérifiant la propriété : si F est un SETI contenant G, alors $F = G$ (G est maximal pour l'inclusion).

Soit F un SETI.

11a. Montrer que $F \subset F^{\perp}$.

11b. Montrer que dim $F \leq n - \dfrac{r}{2}$, où r est le rang de la forme quadratique q.

11c. Montrer que F est inclus dans un SETI maximal.

On suppose que φ est non dégénérée. Etant donnés deux SETIM G_1 et G_2, on note $F = G_1 \cap G_2$, S_1 un supplémentaire de F dans G_1 (de sorte que $F \oplus S_1 = G_1$) et S_2 un supplémentaire de F dans G_2 (de sorte que $F \oplus S_2 = G_2$).

12a. Montrer que $S_1 \cap S_2^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2 = \{0\}$. En déduire que dim $G_1 =$ dim G_2.

12b. Tous les SETIM ayant donc la même dimension, on appelle indice de la forme quadratique q la dimension commune de tous les SETIM. Calculer l'indice de q en fonction de sa signature $(n_+; n_-)$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, qui converge vers une limite *l*.

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, dont le premier terme u_0 est strictement compris entre 0 et 1.

- Etudier la convergence de la suite (u_n).

- En déduire la convergence des séries de terme général : u_n^2, $Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n.

Exercice n° 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels et f une application de E dans F qui vérifie les deux assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2)\ \forall K > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K$$

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall \lambda \in Q, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$, où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

3. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers zéro, calculer la limite de la suite $f(x_n)$.

4. Montrer que f est continue en 0 et en déduire que f est continue et linéaire.

Exercice n° 3

1. Pour t nombre réel compris strictement entre 0 et 1, calculer l'intégrale suivante :

$$A(t) = 2\int_0^1 Max(\omega(1-t), t(1-\omega))d\omega$$

2. Pour x, y>0, on pose : $V(x,y) = 2\int_0^1 Max(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y})d\omega$

Calculer cette intégrale.

Exercice n° 4

Soient E un espace vectoriel normé réel et f une fonction numérique définie sur E. On dit que f est quasi-convexe si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.

2. Montrer que toute fonction monotone sur R est quasi-convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe.

4. Soit f_i une famille de fonctions numériques quasi-convexes définies sur *E*, telle que, pour tout *x* de *E*, $Sup\ f_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction $g(x) = Sup\ f_i(x)$ est quasi-convexe.

5. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x, y \in X,\ \ f(y) \leq f(x) \Rightarrow df(x)(y-x) \leq 0$$

6. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique deux fois différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x \in X,\ \forall h \in E,\ df(x)(h) = 0 \Rightarrow d^2 f(x)(h,h) \geq 0$$

Exercice n° 5

On considère la suite $(u_n(\lambda))$ pour un paramètre réel λ strictement positif par :

$$u_n(\lambda) = \frac{e^{nLn\lambda - \lambda}}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n(\lambda))$ est convergente pour tout $\lambda > 0$.

2. Déterminer le maximum de $(u_n(\lambda))$ pour *n* fixé.

3. Peut-on prolonger $(u_n(\lambda))$ par continuité en $\lambda = 0$?

Exercice n° 6

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ (inégalité de Markov),}$$

où *P* désigne la probabilité et *E(X)* l'espérance mathématique de *X*.

2. Un fabricant produit en moyenne 20 produits par semaine. Cette production est plus ou moins aléatoire, car elle dépend des fournisseurs et de la disponibilité des matières premières. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

3. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)|) \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Où $\sigma(X)$ correspond à l'écart-type de *X*.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 150 mots (réduction au 1/10ème) le texte suivant d'Agnès Rousseaux publié le 8 septembre 2009. Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Sortir du cycle infernal du surendettement

Évoquer la dette des pays dits « en développement », c'est entrer dans un univers de démesure et de non-sens. Les chiffres font peur, à l'image de la situation qu'ils illustrent. Le montant de cette dette était de 70 milliards de dollars en 1970. Il a grimpé en 2007 à 3 360 milliards de dollars. Une augmentation exponentielle qui mine les économies de ces pays en développement, complètement accaparés par le remboursement des emprunts et de leurs intérêts. Selon le Comité pour l'Annulation de la Dette du Tiers-Monde (CADTM), « *les Pays en développement ont remboursé l'équivalent de 102 fois ce qu'ils devaient en 1970, mais entre temps leur dette a été multipliée par 48* ». Cette situation entraîne une dépendance vis-à-vis des créanciers et déstructure l'économie de pays embourbés dans cette spirale infernale.

C'est le cas de l'Équateur, qui consacrait en 2005 environ 40 % de son budget annuel à rembourser sa dette extérieure publique. Et cela au détriment de dépenses sociales, éducatives, sanitaires, dont le pays aurait tant besoin ... Aujourd'hui, 80 % de la population équatorienne vit avec moins de 2 dollars par jour. L'adoption du dollar et l'abandon de la monnaie nationale, en 2000, a provoqué la faillite de milliers de petites entreprises, concurrencées par des importations fortement subventionnées. Depuis plusieurs décennies, les conditions de vie se sont détériorées : accroissement de la pauvreté, problème de dénutrition chronique pour 50 % des enfants, augmentation du chômage... Entre 1970 et 2005, le nombre de personnes vivant sous le seuil de pauvreté est passé de 40 % à 61 %.

A ces régressions économiques et sociales s'ajoutent des impacts environnementaux. Pour pouvoir respecter les remboursements de la dette, la surexploitation des réserves pétrolières a été encouragée, sans que cela ne serve au développement du pays. Déforestations, pollutions des eaux, déplacements de population : les dommages causés sont évalués à 50 fois le montant de la dette ! Et à ce rythme, dans 25 ans, les réserves seront épuisées. Pour ces raisons, le gouvernement de gauche dirigé par le Président Rafael CORREA, élu en 2006, a entrepris une initiative originale pour enrayer le cycle infernal de la dette.

Quand les emprunts servent à licencier, à privatiser et à détruire l'environnement

En 30 ans, la dette de l'Équateur est passée de 240 millions de dollars à 16 milliards. La dictature puis les gouvernements néolibéraux l'ont multiplié par 66 ! Sans que les populations en bénéficient. Mais à quoi donc a servi l'argent emprunté ? Pour le savoir, le Président CORREA a lancé un audit. Une commission nationale, épaulée par des experts internationaux, dont le CADTM, a travaillé pendant plus d'un an à décortiquer les emprunts successifs et leur utilisation. L'audit a été remis en septembre 2008 et ses conclusions sont sans appel : la commission a mis en évidence le caractère illégitime d'une grande partie de la dette publique de l'Équateur.

C'est tout d'abord la « dette odieuse », contractée par le régime dictatorial entre 1968 et 1979, qui entraîne le pays dans une mauvaise pente. Puis la décision unilatérale des États-Unis d'augmenter les taux d'intérêt en 1979. Quelques années plus tard, la crise financière du secteur privé (liée aux dévaluations de la monnaie nationale) oblige l'État à un « sauvetage » du secteur bancaire. Ce qui entraine la transformation de dettes privées en dette publique. Celle-ci est alors multipliée par six...

L'utilisation des crédits est tout aussi effarante. Selon les informations disponibles, seules 14 % des sommes empruntées entre 1989 et 2006 auraient servi à des projets de développement (télécommunications, eau potable, énergie,...), le reste - soit 86 % - étant consacré au remboursement de la dette externe et de ses intérêts. Et c'est sans compter les conditions posées par les créanciers, qui orientent le pays vers une libéralisation à outrance, avec l'obligation de licenciement de 30000 fonctionnaires en 2003-2004, ou le développement d'une économie d'exportation. Un exemple parmi d'autres : certains crédits ont servi à développer la culture des crevettes, production d'exportation encouragée par le FMI. Les conséquences ont été catastrophiques pour les écosystèmes, notamment la mangrove, source de revenus pour les populations locales et barrière contre les inondations. Elle est aujourd'hui détruite à 70 %. Autant de désastres sociaux et environnementaux qui permettent à des associations équatoriennes de réclamer aujourd'hui réparation au titre de la dette écologique dont l'Équateur est créancier.

Suite à l'audit, plutôt que d'attaquer en justice les créanciers peu scrupuleux (FMI, Banques américaines, Club de Paris...), l'Équateur a décidé d'annuler une partie de cette dette illégitime. Au printemps 2009, le gouvernement a annoncé qu'il ne remboursera qu'au tiers de leur valeur les bons émis jusqu'en 2030. Soit une économie substantielle de 2 milliards de dollars. Pour Eric Toussaint, membre du CADTM et de la Commission d'audit, c'est « *un résultat très positif, même si personnellement j'aurai souhaité que ça aille plus loin. L'audit avait donné des raisons, juridiquement étayées, pour annuler une plus grosse partie de la dette. Les 80 % de la dette que nous avions audités étaient totalement répudiables* ».

Une politique souveraine face à la dette

Cette démarche marque une rupture claire avec les pratiques existantes. L'allégement de la dette se fait le plus souvent par négociation multilatérale. Et les créanciers conditionnent l'allégement de la dette à certaines mesures, comme par exemple la privatisation de secteurs d'activités. Cela a été le cas du Brésil qui a, dans les années 90, laissé à l'abandon les services publics de base (santé, éducation, transport) puis a finalement réussi à rembourser intégralement sa dette au FMI, en soutenant fortement l'agrobusiness, avec toutes les conséquences néfastes, sur le plan écologique et social, que l'on peut imaginer (déforestation massive, paysans privés de terres et de ressources...). Dans le cas de l'Équateur, il s'agit au contraire d'un acte unilatéral et souverain. Cela crée un précédent, d'autant plus que l'Équateur n'est pas au bord de la banqueroute. L'annulation partielle de la dette va permettre de consacrer une part plus importante aux dépenses sociales : santé, éducation, infrastructures…

Aujourd'hui, malgré les risques d'embargo, de fuite des capitaux, d'annulation d'investissements, et autres menaces de la part de banquiers et d'États effrayés par cette mesure unilatérale, plusieurs autres pays envisagent de suivre cette voie. C'est le cas par exemple du Zimbabwe ou du Paraguay, qui a invité le CADTM pour discuter d'une stratégie à adopter. Un signe positif : plus les pays seront nombreux à s'engager dans cette voie, plus le rapport de force pourra peser en leur faveur. Qui, après l'initiative équatorienne, voudrait continuer de payer une dette illégitime ou qui n'a pas été auditée ?

« Il faut poursuivre en justice les responsables de cette situation »

L'initiative ne vient pas seulement des pays débiteurs. En 2006, la Norvège avait procédé à l'annulation de la dette de cinq pays pour des emprunts dont elle reconnaissait les conditions inappropriées. On pourrait en espérer autant de la France, dont les créditeurs ont été ou sont bien souvent liés par des relations coloniales ou néocoloniales.

D'autres moyens sont à explorer. Pour sa part, Eric Toussaint espère que les instructions judiciaires vont se développer à l'égard des fonctionnaires équatoriens qui, depuis 2000, ont signé des contrats avec les banques américaines. En allant à l'encontre du droit et de la Constitution équatorienne, ils ont trahi les intérêts de leur pays, bien souvent motivés par des pots-de-vin. Les dirigeants des banques, peu regardants sur les conditions de prêts et qui ont tiré profit de cette situation, devraient également être mis en cause. De même que les institutions financières internationales et leurs plans de dérégulation à outrance. Qui osera intenter un procès à la Banque mondiale ?

Les bases d’un autre modèle de développement ?

« *Il ne s’agit pas de déclarer une dette illégitime parce qu’elle est le produit d’un système capitaliste. On peut avoir des dettes odieuses dans des systèmes non capitalistes. L’audit de la dette n’est pas directement une critique du capitalisme, mais il promeut un autre modèle de développement, favorise la reconquête démocratique, l’exercice de la souveraineté de chaque pays. C’est un moyen pour rompre avec des mécanismes de dépendance, c’est donc un instrument de libération et de justice* », explique Eric Toussaint. La démarche d’audit permet surtout d’inverser le rapport de force entre créanciers et créditeurs. Et de faire réfléchir – ou fléchir- les créanciers peu scrupuleux, en faisant peser la menace du non-remboursement de leurs capitaux en cas de conditions jugées illégitimes. Ce processus est en tout cas une remise en cause efficace d’un système de domination et d’oppression. Il met en lumière l’immoralité et l’illégalité d’une partie de ces dettes, tout en proposant une résolution effective et rapide du problème ainsi qu’un cadre de contrôle pour l’avenir.

L’Equateur est un exemple que devraient peut-être suivre les pays du Nord, dont les gouvernements n’ont pas hésité à mettre à disposition des marchés 7800 milliards de dollars entre avril et octobre 2008. Cela a provoqué une hausse considérable de la dette publique, sans que les citoyens aient eu leur mot à dire. Une petite partie de ce montant aurait permis à un grand nombre de pays en développement de s’en sortir. Mais sauver des banques est sans doute plus important que d’investir sur le long terme dans des politiques de développement respectueuses de l’environnement - au Nord comme au Sud - ou de sauver des pays de la logique infernale de l’endettement et de la misère qui en découle.

Agnès Rousseaux

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à 3 et dont les coefficients sont réels.

1. Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'intégrale
$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
converge.
2. Si on note par $\theta = (c, x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbb{R}^4$, montrer que l'application
$$w_\theta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R},$$
définie par
$$w_\theta(P) = c(P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)),$$
est une application linéaire.
3. Calculer θ tel que
$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = w_\theta(P),$$
pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice II

Soit P_n la suite de polynômes réels définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = 1 + X$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) + XP_{n-1}(X). \tag{1}$$

1. Montrer, par récurrence, que le degré des polynômes P_{2n} et P_{2n-1} est n.
2. Ecrire l'équation caractéristique de la suite récurrente linéaire (1) et donner la solution $P_n(X)$ de cette suite.
3. Montrer que toutes les racines de $P_n(X)$ sont réelles.

Exercice III

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\, dx$$

   est asymptotiquement équivalent à n, quand n tend vers l'infini.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n}\, dx$$

   est asymptotiquement équivalent à $\frac{C}{n}$, quand n tend vers l'infini. Calculer explicitement la constante $C > 0$.

Exercice IV

Méthode numérique d'approximation d'une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$.

Soit l'intervalle $[a, b]$ fixé, pour $a < b$ réels.

I. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

1. Montrer que $g(x)$ ne s'annule en aucun x de $]a, b[$;
2. Démontrer que $g(x) < 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

II. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe un unique c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$;
2. Montrer qu'il existe m_1 et m_2 tels que
$$0 < m_1 \leq f'(x), \quad 0 < f''(x) \leq m_2 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [a, b[;$$
3. On souhaite approximer c. Soit P le polynôme de degré 1 tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, et soit c_1 dans $]a, b[$ tel que $P(c_1) = 0$. Démontrer que $a < c_1 < c$, en utilisant la fonction $g(x) = f(x) - P(x)$.

III. Désormais on conserve les hypothèses de la partie II.

Soit $\{c_n\}_{n \geq 0}$ la suite récurrente définie de la façon suivante :
-on pose $c_0 = a$;
-pour tout $n \geq 0$ et c_n déjà défini, on note P_n l'unique polynôme de degré 1 tel que $P_n(c_n) = f(c_n)$, $P_n(b) = f(b)$; on définit c_{n+1} par $P_n(c_{n+1}) = 0$.

1. Trouver explicitement la fonction φ telle que $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.
2. Montrer que la suite $\{c_n\}_{n \geq 0}$ est strictement croissante et contenue dans l'intervalle $[a, c]$.
3. Montrer que la suite $\{c_n\}_{n \geq 0}$ converge vers c, et que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|c_n - c| \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Application numérique : Représenter graphiquement la fonction $f(x) = x^3 - 4x + 1$ et donner l'approximation numérique c_3 de la solution réelle de $f(x) = 0$ comprise entre 1.5 et 2. Donner un majorant de l'erreur commise en utilisant ce qui précède.