

Exercice 1 :

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \alpha n + \beta \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = 4U_n - 6n - 15$

- 1) Déterminer les réels α et β pour la que la suite V_n soit une suite géométrique
- 2) On supposera pour la suite que $\alpha = 1$ et $\beta = -1$
 - a) Si (V_n) est une suite géométrique préciser alors la raison et le premier terme
 - b) Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$
- 3) Montrer que la suite U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = t_n + w_n$ où t_n est une suite géométrique et w_n une suite arithmétique
- 4) Calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^n t_k \quad R_n = \sum_{k=0}^n w_k \quad \text{en déduire la somme } S_n = \sum_{n=0}^n u_k$$

- 5) Etudier la convergence de chacune des suites ci-dessus

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral, de côté a . On suppose que : $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$. I est le milieu du segment [AB], J celui du segment [AC]. On note K le symétrique du point J par rapport à (AB).

- 1) Déterminer les angles $(\overline{BJ}, \overline{BA}), (\overline{BJ}, \overline{BK}), (\overline{BC}, \overline{BK})$.
- 2) Déduisez-en la nature du triangle BCD, et la distance CK.
- 3) On note α l'angle $\left|(\overline{CB}, \overline{CK})\right|$. Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.
- 4) Soit L le point du plan tel que CKL soit un triangle équilatéral direct ?

$$\text{a) Montrer l'égalité : } BL^2 = \frac{11}{4}a^2 - a^2\sqrt{7} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

- b) Calculer alors la distance BL.

- 5) En appliquant la relation d'al Kashi dans le triangle LBC. Calculer

6) Déduisez l'alignement des points L, B, I et montrer que L est le symétrique du point I par rapport à B.

7) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan

$$MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 3a^2. (\text{on pourra vérifier que A appartient à (E).})$$

Problème :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sin 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3) Calculer la limite de f en $-\infty$. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote de (C_f) courbe représentative de f et étudier la position relative de (D) et (C_f) .

4) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x + \frac{2\pi}{3}) = f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

5) a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^-$ et dresser son tableau de variation.

b) Etudier la variation de f sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

6) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^-$. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers un intervalle J à déterminer.

7) g^{-1} , est-elle dérivable en $\sqrt{2}$? Si oui calculer $g^{-1}'(\sqrt{2})$.

8) Construire (C_f) ; $(C_{g^{-1}})$ dans un repère Orthonormé unité graphique 2 cm. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.