.ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« Dans ce pays, ce sont les études qui permettent à nos enfants d'espérer quelque chose d'autre. » Barack Obama*, Eduquer nos enfants dans le contexte économique du XXIe siècle,* 25 octobre 2005. Discutez et illustrez cette citation.

Sujet n° 2

L'égalité entre les femmes et les hommes : réalité, projet ou utopie ? Vous illustrerez votre réflexion au plan universel, ainsi que dans votre propre pays.

Sujet n° 3

Expliquez et discutez cette définition de la mondialisation : « *Il s'agit d'un véritable coup d'Etat institutionnel à l'échelle de la planète.* » Citation d'Aminata Traoré, intellectuelle malienne et ancienne ministre de la culture du Mali, extraite de *Le viol de l'imaginaire*.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET D'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à p lignes et p colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_p$, on note $\underline{M}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de la matrice M dans la base canonique. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est désigné par $< .,. >$. La norme euclidienne est notée par $|| \, ||$. Finalement, pour tout endomorphisme η, on désigne par η^* son adjoint défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad < \eta(x), y > = < x, \eta^*(y) > .$$

Partie I

Soit n un entier ≥ 1. On appelle forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ une application $\omega \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est

- Bilinéaire : Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $x \longmapsto \omega(x,y)$ est linéaire et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $y \longmapsto \omega(x,y)$ est linéaire.
- Antisymétrique : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.
- Non-dégénérée : Le seul vecteur x qui vérifie $\omega(x,y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur nul.

a. Soit η un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \omega(x,y) = < \eta(x), y > . \tag{1}$$

Montrer que ω est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si η est inversible.

b. Soit ω une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme η de $\mathbb{R}^n$ tel que la relation (1) soit vérifée. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.

c. Montrer que s'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, alors n est pair.

d. On suppose dans cette question que $n = 2m$. On pose

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \qquad \omega_0(x, y) = < \underline{J}x, y >$$

où J est la matrice donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$$

I_m étant la matrice unité.

1) Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2m}$.

2) Soit $(e_k)_{1 \le k \le 2m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$. Calculer $\omega_0(e_k, e_l), 1 \le k \le 2m, 1 \le l \le 2m$.

Partie II

On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle matrice symplectique toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ telle que

$${}^tMJM = J.$$

1. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice symplectique?

2. L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication?

3. La matrice J est-elle symplectique?

4. La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique?

5. On écrit toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

   (a) Montrer que la matrice M est symplectique si et seulement si les matrices A, B, C, D vérifient les conditions
   $$\begin{cases} {}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont symétriques} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m \end{cases}$$

   (b) Montrer que si D est inversible, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ telle que
   $$M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Partie III

Soit M une matrice symplectique et soit P son polynôme caractéristique.

1. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P(\lambda) = \lambda^{2m} P\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

2. Montrer que si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M, de multiplicité d, alors $\dfrac{1}{\lambda_0}, \overline{\lambda_0}, \dfrac{1}{\overline{\lambda_0}}$ sont des valeurs propres de M, chacune de multiplicité d.

3. Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de -1 et 1?

4. Donner des exemples de matrices symplectiques $\in \mathcal{M}_4$, diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et ayant
   - (a) une seule valeur propre ;
   - (b) deux valeurs propres doubles distinctes ;
   - (c) une valeur propre double et deux valeurs propres simples ;
   - (d) quatre valeurs propres distinctes non réelles et de module $\neq 1$.

Partie IV

Soient ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ et M sa matrice dans la base canonique.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   - (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}$, $\omega_0(\phi(x), \phi(y)) = \omega_0(x, y)$,
   - (ii) la matrice M est symplectique.

Un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ qui vérifie la propriété (i) ci-dessus est appelé *endomorphisme symplectique.*

Un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^n$ est dit *stable* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(||\psi^p(x)||)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, où ψ^p désigne la composée de l'application ψ avec elle-même p fois.

2. Montrer que si un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^n$ a toutes ses valeurs propres distinctes et de module 1 dans $\mathbb{C}$, alors ϕ est stable.

3. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}_m$ pour que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique soit symplectique et stable.

b) Montrer que si un endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ possède une valeur propre dans $\mathbb{C}$ de module $\neq 1$, alors ϕ n'est pas stable.

4. On note $x_1, \cdots, x_{2m}$ les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^{2m}$ dans la base canonique. On considère les ensembles

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad \sum_{k=1}^{2m} x_k^2 \leq 1 \right\},$$

$$C_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \right\}$$

et

$$\Gamma_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad x_1^2 + x_{m+1}^2 \leq R^2 \right\}, R \text{ étant un réel strictement positif.}$$

4. a) On suppose $m \geq 2$. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe un endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\phi(B) \subset C_R$.

b) Soit ϕ un endomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2m}$ et soit ϕ^* l'adjoint de ϕ par rapport au produit scalaire euclidien. Montrer que ou bien $||\phi^*(e_1)|| \geq 1$, ou bien $||\phi^*(e_{m+1})|| \geq 1$.

c) En déduire que, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\phi(B) \subset \Gamma_R$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R ***désigne l'ensemble des nombres réels.***

Exercice n° 1

1. Calculer $I(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{Ln\,t}{1+t^2}\,dt$, pour tout réel x strictement positif.

2. Calculer $J = \iint_D (x^2 - 2y)\,dx\,dy$, où $D = \left\{(x, y) /\ x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$. Les paramètres réels *a* et *b* sont supposés strictement positifs.

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,1]$

2. Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = (x - \frac{1}{2})\,f(x)$; étudier la continuité et la dérivabilité de g.

3. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = (x - \frac{1}{2})^2\,f(x)$; étudier la continuité et la dérivabilité de h.

Exercice n° 3

1. Montrer qu'il existe une unique application $f : N^{*} \to N$ qui vérifie les trois propositions suivantes :

(1) $f(1) = 0$

(2) $f(p) = 1,$ pour tout nombre premier *p*.

(3) $f(xy) = yf(x) + xf(y),$ pour tout couple d'entiers non nuls.

On donnera une expression de $f(n)$ en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de *n* en produit de nombres premiers, à savoir $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$, où $p_1 ,... p_k$ sont des nombres premiers.

2. Soit $n \in N^{*}$. Montrer que $f(n) = n$ si et seulement si $n = p^{p}$ où *p* est un nombre premier.

Exercice n° 4

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_1^e x(Ln\ x)^n dx$

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_0^1 x^n\ Ln(x+1)\, dx$

Exercice n° 5

Déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt, \text{ pour tout } x \in R .$$

Exercice n° 6

Un fournisseur livre deux sortes de boissons B1 et B2. Dans chaque livraison figurent 20% de boissons B1 et 80% de boissons B2.

1. On prélève, au hasard, 4 boissons dans une livraison de 50 boissons.

   - Préciser la probabilité d'avoir 4 boissons de type B1.
   - Préciser la probabilité d'avoir 1 boisson de type B1 et 3 boissons de type B2.
   - Préciser la probabilité d'avoir au moins une boisson de type B1.

2. On prélève maintenant une boisson, on note son type et on la remet dans le lot.
   On réalise *n* fois cette expérience et on note X le nombre de boissons B1 obtenues.

   - Exprimer la probabilité que $X \geq 1$ en fonction de *n*.
   - Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins une boisson B1 ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots le texte suivant extrait du livre « La nouvelle écologie politique – Economie et développement humain » de Jean-Paul FITOUSSI et Eloi LAURENT.

Il s'attachera à construire son résumé indépendamment du plan du texte et n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Repenser le développement humain

« La croissance est-elle obsolète ? ». C'est la question qui fut posée par William Nordhaus, spécialiste de l'économie de l'environnement, et le prix Nobel d'économie 1981 James Tobin[1] il y a plus de trente ans. Ils y répondirent par la négative. Et pourtant, « la croissance, écrivirent-ils, est accusée de brouiller les priorités nationales, d'aggraver la distribution du revenu et d'altérer de manière irréparable l'environnement […] Mais plutôt que de rejeter en bloc l'idée de croissance et son principal instrument de mesure, Nordhaus et Tobin tentèrent de partir du PIB (produit intérieur brut) pour l'améliorer et proposer « une mesure du bien-être humain ». Car selon eux, « l'état stationnaire classique ne doit pas devenir une norme utopiste ».

Le Rapport sur le développement humain des Nations Unies de 1990 a lui aussi marqué, à partir des travaux de Sen, un renouveau dans la conception du développement : « Ce que nous appelons le développement humain est le processus qui élargit l'éventail des possibilités offertes aux individus : vivre longtemps et en bonne santé, être instruit et disposer de ressources permettant un niveau de vie convenable sont des exigences fondamentales ; s'y ajoutent la liberté politique, la jouissance des droits de l'homme et le respect de soi[2] ». Sen résume cette approche en une superbe formule qui définit le développement « comme un processus d'expansion des libertés réelles dont jouissent les individus[3] ».

[1] W. Nordhaus et J. Tobin, « Is Growth Obsolete ?, in *The Measurement of Economic and Social Performance,*National Bureau of Economic Research, 1972.
[2] « Rapport mondial sur le développement humain, 1990, Définir et mesurer le développement humain », Nations Unies.
[3] Amartya Sen, *Un nouveau modèle économique, op. cit.*

De ces réflexions sont nés trois indicateurs principaux de développement humain : l'indice de développement humain (l'IDH) qui repose sur trois dimensions (l'espérance de vie, l'éducation et le revenu par habitant), l'indice de développement humain par genre (qui ajoute à l'IDH les inégalités entre hommes et femmes) et l'indice de pauvreté humaine (qui mesure la pauvreté non pas sous forme monétaire, mais selon les dimensions de l'IDH). Cependant ces indicateurs ont été avant tout construits pour mesurer les progrès des pays en développement, et demeurent, en tout cas pour le principal d'entre eux (l'IDH), trop corrélés au PIB pour fournir une information vraiment nouvelle. Il s'agit donc à présent de poursuivre la réflexion en améliorant notre compréhension du progrès humain et en y incluant les pays développés.

Trois décennies après Nordhaus et Tobin et quinze ans après l'IDH, la marge d'amélioration de la réflexion et des instruments de mesure du développement humain demeure en effet importante. Et la tâche devient urgente et nécessaire : il existe une divergence croissante entre la mesure des phénomènes économiques et sociaux, et la perception qu'en ont les populations. Qui plus est, cette discordance est universelle. Il se peut que notre appareil statistique, qui nous a relativement bien servi dans un passé pas trop lointain, ne soit plus tout à fait adapté aux problèmes que nous affrontons aujourd'hui. Il est par exemple évident qu'en une période caractérisée par une forte croissance des inégalités, personne ne peut plus se reconnaître dans un indicateur qui reflète une moyenne.

Une première direction de recherche apparaît dès lors nécessaire : modifier le cadre comptable existant pour qu'il prenne mieux en compte les évolutions de l'économie et de la société : inégalités, sécurité, services publics (santé, éducation, etc.) notamment. De plus, un certain nombre de phénomènes qui déterminent le bien-être des populations ne sont pas mesurés par notre appareil statistique, pour l'essentiel ceux relatifs à l'environnement (qualité de l'air, de l'eau, etc.). Une deuxième direction de recherche consiste alors à tenter d'en proposer des mesures acceptables. Enfin, nous ne disposons pas vraiment d'indicateurs de la qualité de la vie, même si de nombreux travaux s'y sont brièvement essayés (bonheur, « capabilités », loisir, libertés, participation à la vie de la cité, etc.). Il convient de les développer et de les affiner, tant la mesure du bien-être est importante pour la formulation de politiques efficaces. Ces trois directions ont été distinguées pour les besoins de l'exposé mais il va de soi qu'elles se recoupent en de nombreux aspects[4].

[4] Voir à ce sujet les travaux de la « *Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress* » et notamment la première note d'étape remise au Président de la République (juillet-août 2008).

L’économie ouverte

Il nous faut à présent synthétiser notre propos à la lumière de la théorie moderne du développement et de la justice sociale. La première a été reformulée avec une clarté particulière par Dani Rodrik[5]. Selon lui, trois causes « profondes » ou « fondamentales » expliquent le développement économique : l’environnement naturel (les avantages ou les handicaps liés à la position géographique d’un pays et à ses caractéristiques naturelles telles que le climat, le sol …), l’échange international (le commerce avec les autres nations du monde sur le marché des biens, des capitaux auxquels s’ajoutent les flux migratoires) et enfin les institutions (entendues au sens large comme les arrangements sociopolitiques formels et informels qui influent sur les activités économiques. Les causes secondes ou « apparentes » qui dérivent de ces forces profondes sont l’accumulation quantitative des facteurs de production (capital physique et capital humain) et la croissance de la productivité (l’accumulation qualitative du progrès technique).

La dynamique du revenu par habitant est ainsi déterminée directement par les causes apparentes et indirectement par les causes fondamentales. Quelles sont alors les causes premières ou prépondérantes du développement économique ? Comment les hommes peuvent-ils maîtriser leur prospérité ? Rodrik apporte trois réponses à ces questions : d’une part, la géographie est une cause « exogène » du développement hors de portée du contrôle humain, tandis que les institutions et l’échange international sont « partiellement endogènes » ; d’autre part, la géographie influe sur les institutions et l’échange international et ces deux dernières causes se déterminent mutuellement ; enfin, les institutions sont la cause prépondérante du développement économique.

Jean-Paul FITOUSSI et Eloi LAURENT
« *La nouvelle écologie politique* » *(pp.76-78)*

---

[5] Dani Rodrik (dir.), *In Search of Prosperity : Analytic Narratives on Economic Growth*, Princeton N.J., Princeton University Press, 2003.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soient u_n et v_n les termes généraux d'une série.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ensemble des entiers naturels non nuls, on considère

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} \\ v_n &= \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

   (a) Première méthode
      i. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - v_n$?
      ii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

   (b) Seconde méthode
      i. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\frac{1}{1+x}$.
      ii. En déduire un développement de u_n.
      iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère maintenant

$$u_n = \frac{C-(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)-(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}$$

   où C est une constante réelle. On désire déterminer la nature de la série de terme général u_n selon les deux méthodes employées dans l'exemple précédent **1.**.

(a) Première méthode

i. Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permettant de procéder comme en **1. (a)**.

ii. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - v_n$.

iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

(b) Seconde méthode

i. Exprimer le développement limité d'une fonction que l'on précisera en 0, à un ordre que l'on précisera également.

ii. En déduire un développement de u_n pour n grand.

iii. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Problème

On observe un phénomène aléatoire. On désire construire une fonction permettant de déterminer si on a affaire à un aléa prenant ses valeurs sur au plus p quantités (non connues) ou un autre type d'aléa (plus de p quantités, aléa continu, etc.). On ne connaît de X que la valeur de ses $2p+1$ premiers moments.
Soient p un entier non nul et $x = (x_0, \ldots, x_p)$ un $(p+1)$-uplet réel.

1. Matrice de Vandermonde

On note $VM_p(x)$ la matrice de Vandermonde définie pour tout $p \geq 1$ par

$$VM_p(x) = \left(x_j^i\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(a) Exprimer matriciellement $VM_1(x)$.

(b) Exprimer matriciellement $VM_2(x)$.

(c) Calculer le déterminant (det) de $VM_1(x)$.

(d) Exprimer le déterminant (det) de $VM_2(x)$ en fonction de

$$\prod_{0=j<k=2} (x_k - x_j).$$

(e) Montrer par récurrence que pour tout $p \geq 1$,

$$det(VM_p(x)) = \prod_{0=j<k=p} (x_k - x_j).$$

Indication : on pourra effectuer des transformations sur les lignes L_i avec $L_i - x_0 L_{i-1} \longrightarrow L_i$.

(f) Soit p fixé, que dire des valeurs de $(x_0, \ldots, x_p)$ si $det(VM_p(x)) = 0$?

2. Matrice de Hankel

On note $H_p(x)$ la matrice de Hankel définie pour tout $p \geq 1$ par

$$H_p(x) = \left(x_j^{i+j}\right)_{i,j=0,\ldots,p}.$$

(a) Exprimer matriciellement $H_1(x)$.

(b) Exprimer matriciellement $H_2(x)$.
(c) Exprimer matriciellement $H_3(x)$.
(d) Calculer les déterminants de $H_1(x)$ et $H_2(x)$.
(e) Exprimer le déterminant de $H_2(x)$ en fonction du déterminant de $VM_2(x)$.
(f) Exprimer le déterminant de $H_3(x)$ en fonction du déterminant de $VM_3(x)$.
Indication : utiliser des transformations sur les lignes L_i avec $L_i - x_0 L_{i-1} \longrightarrow L_i$.
(g) Exprimer le déterminant de $H_p(x)$ en fonction de celui de $VM_p(x)$.
(h) Donner une expression du déterminant de $H_p(x)$ en fonction de p et de $(x_0, \ldots, x_p)$.
(i) Soit p fixé, que dire des valeurs de $(x_0, \ldots, x_p)$ si $det(H_p(x)) = 0$?

3. Aléa et matrice de Hankel.

On considère maintenant X une variable aléatoire pouvant prendre q valeurs distinctes notées $a_1, \ldots, a_q$. Et soient $X_0, \ldots, X_p$ un $(p+1)$-uplet de variables aléatoires, indépendantes entre elles et de même loi que X.
On note $\mathbb{E}$ le signe espérance et on rappelle que si p_k désigne la probabilité que la variable X prenne la valeur a_k, le moment d'ordre j de X, $\mathbb{E}(X^j)$ est égal à

$$\mathbb{E}(X^j) = \sum_{k=1}^{q} a_k^j p_k.$$

On note $EH_k(X)$ la matrice des espérances des moments d'ordre 0 à $2k$ de la variable aléatoire X. Plus précisément, pour tout $k \geq 1$,

$$EH_k(X) = \left(\mathbb{E}(X^{i+j})\right)_{i,j=0,\ldots,k}.$$

(a) Exprimer matriciellement $EH_1(X)$.
(b) Exprimer matriciellement $EH_2(X)$.
(c) Exprimer matriciellement $EH_3(X)$.
(d) Exprimer matriciellement $\mathbb{E}(H_p(X_0, \ldots, X_p))$.
(e) Que dire de $EH_p(X)$ et de $\mathbb{E}(H_p(X_0, \ldots, X_p))$?
(f) Combien y-a-t-il de permutations σ des éléments $\{0, , \ldots, p\}$? On notera l'ensemble de ces permutations $\mathcal{S}_{p+1}$.
En déduire une expression de $EH_p(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(H_p(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(p)}))$.
(g) Que dire de $EH_p(X)$ et de $\mathbb{E}(H_p(X_1, X_0, X_2 \ldots, X_p))$?
(h) Exprimer le déterminant de la matrice de Hankel des moments de X, $det(EH_p(X))$.
Justifier soigneusement les inversions de signe espérance et déterminant lorsqu'il y a lieu.
Indication : On pensera à utiliser la formule de Leibnitz donnant le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,K}$ de taille $K+1$. On rappelle que la formule de Leibnitz en ce cas est

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{K+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{K} a_{\sigma(i)i}$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.
(i) Que dire de q et p lorsque $det(EH_p(X)) = 0$?

4. Conclure.