Durée : 6 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2004 CLASSES TERMINALES

M A T H E M A T I Q U E S

Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la concision, de la clarté et de la précision des solutions proposées, mais aussi du soin apporté à la présentation.

PROBLEME

Objectifs, définitions et notations

Dans tout le problème, $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct, $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Objectif

L'objet du problème est l'étude de quelques questions relatives à la notion de points cocycliques.
Cette étude fera appel à la notion de deux droites symétriquement inclinées sur une troisième ainsi qu'à celle de puissance d'un point par rapport à une conique généralisant la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle qui a été certainement déjà rencontrée.

Définition 1 (angle orienté de droites)

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ et θ un nombre réel.
On dit que θ est une mesure de l'angle orienté du couple de droites $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ si et seulement si θ ou $\theta + \pi$ est une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

On note, $(\overrightarrow{v_1} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{v_2})$ l'angle du couple de vecteur $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ et $(D_1 \,\widehat{,}\, D_2)$ l'angle du couple de droites (D_1, D_2).

Définition 2 (Droites symétriquement inclinées)

Etant données trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}$ du plan $\mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$ si les angles orientés des couples de droites, $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_2)$ ont des mesures opposées modulo π.

PRELIMINAIRES

1. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ d'affixes respectives z_1 et z_2 et soit θ un nombre réel.
   Donner une relation nécessaire et suffisante entre z_1, z_2 et θ pour que
   $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}) = \theta\ (\pi)$.

2. Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in 3 \times 3 \times 3^*$.

   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation φ du plan $\mathcal{P}$ définie analytiquement dans $\mathcal{R}$ par : $\begin{cases} x' = \lambda x + \alpha \\ y' = \lambda y + \beta \end{cases}$

   b) Soit Γ une courbe d'équation, dans $\mathcal{R}$, $f(x, y) = 0$, où f est une application de 3×3 dans 3.
   Montrer que l'ensemble Γ' défini par : $f(\lambda x + \alpha, \lambda y + \beta) = 0$, se déduit de Γ par une transformation que l'on précisera.

PARTIE I **Droites symétriquement inclinées et points cocycliques**

1. Soit trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ d'affixes respectives z, z_1 et z_2.

   a) Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $\dfrac{z_1 z_2}{z^2}$ est réel.

   b) En déduire, dans le cas où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, que :
   $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elles sont, soit parallèles à $\mathcal{D}$, soit perpendiculaires à $\mathcal{D}$.

2. Soit A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre points distincts d'un cercle du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.
   On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$.

a) Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$ est réel.

b) Montrer que les droites (A_1 A_3) et (A_2 A_4) sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$.
En est-il de même pour les droites (A_1 A_4) et (A_2 A_3) ?

3. Soit A_1, A_2 et A_3 trois points distincts d'un cercle de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 et soit t l'affixe d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de la tangente T en A_1, à . On suppose que les droites (A_1 A_2) et (A_1 A_3) sont symétriquement inclinées sur une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$.

a) Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_2)\, t}{(z_3 - z_1)\,(z_1 - z_2)}$ est réel.

b) Montrer que les droites T et (A_2 A_3) sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$.

PARTIE II Etude générale des coniques

On rappelle que les coniques (propres) sont les courbes obtenues en coupant un cône circulaire par un plan ne passant pas par le sommet du cône.
On a aussi la définition suivante.

Définition 3

Etant donné une droite d, un point F n'appartenant pas à d et un réel strictement positif e, on appelle conique de directrice d, de foyer associé F et d'excentricité e l'ensemble Γ des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur d.

1) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ passant par F et orthogonale à d est un axe de symétrie pour Γ.

2) Soit K le point d'intersection de d et de $\mathcal{D}$, M un point de Γ, M' son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.
Montrer que $M'M^2 + \left(\overrightarrow{M'F} + e\,\overrightarrow{M'K}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M'F} - e\,\overrightarrow{M'K}\right) = 0$.

3) On suppose e = 1.

   a) Montrer que $\Gamma \cap \mathcal{D} = \{\Omega\}$, où Ω est le milieu de [K F].

   b) Montrer que $\Gamma = \{M \in P \,/\, M'M^2 = 2\,\overline{\Omega M'} \times \overline{KF}\}$.

   c) En déduire que l'ensemble des projetés orthogonaux des points de Γ sur $\mathcal{D}$ est la demi-droite $[\Omega x)$ d'origine Ω contenant F.
   On dit que Γ est la parabole de directrice d et de foyer F ; Ω est son sommet.

4) On suppose $e \neq 1$

   a) Montrer que $\Gamma \cap \mathcal{D} = \{\Omega, \Omega'\}$, où Ω = bary { (F, 1) (K, e)}.
   et Ω' = bary {F, 1) (K, -e)}.

   b) Montrer que $\Gamma = \{ M \in \mathcal{P} \,/\, M'M^2 = (e^2 - 1)\, \overline{M'\Omega} \times \overline{M'\Omega'}\}$.

   c) En déduire que :

      i) si e < 1, l'ensemble des projetés orthogonaux des points de Γ sur $\mathcal{D}$ est $[\Omega\,\Omega']$. Γ est alors appelé ellipse ; Ω et Ω' sont ses sommets.

      i.i) si e > 1, l'ensemble des projetés orthogonaux des points de Γ sur $\mathcal{D}$ est la réunion des deux demi-droites $[\Omega x)$ et $[\Omega' x')$ d'origine respectives Ω et Ω' ne contenant pas K.
      Γ est alors appelé hyperbole ; Ω et Ω' sont ses sommets.

5) On se propose de montrer qu'un cercle ne peut pas vérifier la définition 3.
   En effet, si tel était le cas, l'axe focal $\mathcal{D}$ serait un diamètre de ce cercle et aurait deux points communs Ω et Ω' avec le cercle.

   a) Montrer alors que $M'M^2 = -\overline{M'\Omega} \times \overline{M'\Omega'}$
   b) En comparant avec une autre expression de MM'^2, conclure.

N.B. : Cela n'empêche pas au cercle d'être une conique en tant que section plane d'un cône.
Nous retiendrons donc que les coniques sont les cercles, les ellipses les hyperboles et les paraboles.

PARTIE III Puissance d'un point par rapport à une conique

Soit Γ une conique et S un point du plan. On se propose de définir la notion de puissance de S par rapport à Γ.
On considère alors une droite Δ quelconque passant par S, munie d'un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$.

1. On suppose que Γ est un cercle de centre I et de rayon R > 0.
   a) On suppose que Δ coupe Γ en deux points A et B et on pose $p = \overline{SA}.\ \overline{SB}$.
      Exprimer p en fonction de SI et R.
      Le nombre p, qui ne dépend que de S et Γ, est appelé puissance de S par rapport à Γ et est noté Γ (S).

   b) On suppose que Δ est tangente à Γ en M_0. Montrer que $\Gamma(S) = SM_0^2$.

2. On suppose que Γ n'est pas un cercle. Soit e son excentricité, $\mathfrak{D}$ son axe focal et θ une mesure de l'angle orienté du couple de droites $(\mathfrak{D}, \Delta)$.
   On se propose de montrer que lorsque Δ coupe Γ en deux points A et B, le produit $p = (1- e^2 \cos^2 \theta)\ \overline{SA}\ .\ \overline{SB}$ ne dépend que de S et Γ. Pour cela, on suppose dans cette question que le repère $\mathfrak{R}$ est choisi de sorte que $\mathfrak{D} = (o, \vec{i})$.

   a) Montrer que Γ peut être défini dans $\mathfrak{R}$ par une équation de la forme f(x,y) = 0, où $f(x, y) = (1 - e^2)\, x^2 + y^2 + \mu_1 x + \mu_2$ avec μ_1 et μ_2 deux constantes réelles.

   b) On note (x_0, y_0) les coordonnées de S. Soit $M \in \Delta$ et posons $\lambda = \overline{SM}$.

      i) Exprimer les coordonnées x et y de M en fonction de x_0, y_0, θ et λ.

      ii) En déduire que $M \in \Gamma$ si et seulement si λ est racine d'une équation de la forme $(1 - e^2 \cos^2 \theta)\, X^2 + \beta X + \gamma = 0$ où β et γ sont des réels qu'on exprimera en fonction de θ, x_0, y_0, e, μ_1 et μ_2.

   c) On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B.
      Montrer que $p = f(x_0, y_0)$; p s'appelle la puissance de S par rapport à Γ et sera noté Γ (S).

   d) On suppose que Δ est tangente à Γ en M_0.
      En admettant que $1 - e^2 \cos^2 \theta \neq 0$, montrer que $f(x_0,y_0) = (1 - e^2 \cos^2 \theta)\, SM_0^2$.

…/… 6

PARTIE IV lignes de niveau de l'application $S \mapsto \Gamma(S)$

Soit Γ une conique du plan.
A tout réel r, on associe $\Gamma_r = \{S \in \mathcal{P} / \Gamma(S) = r\}$
On pose : $U = \{r \in 3 / \Gamma_r = \phi\}$ $V = \{r \in 3 / \Gamma_r$ est réduit à un point$\}$;
$W = 3 \setminus (U \cup V)$.

1. On suppose que Γ est un cercle de centre I et de rayon R.
   Préciser en fonction de R, les ensembles U, V et W et décrire Γ_r pour $r \in W$.

2. On suppose que Γ n'est pas un cercle.

   a) Déterminer Γ_0. Lequel des ensembles U, V et W contient O ?

   b) On suppose que Γ est une ellipse d'équation, dans $\mathfrak{R}$,
   $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$. On a alors $\mathfrak{D} = (o, \vec{i})$ qui est l'axe focal.
   Déterminer U, V et W et montrer que pour tout réel $r \in W$, Γ_r est l'image de Γ par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

   c) Répondre aux mêmes questions qu'en IV – 2 –b) si Γ est la parabole d'équation $y^2 = 2\,a\,x$ dans $\mathfrak{R}$ avec $a > o$. $\mathfrak{D} = (o, \vec{i})$ est alors l'axe focal.

   d) On suppose que Γ est une hyperbole d'équation, dans $\mathfrak{R}$,
   $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$. On a alors $\mathfrak{D} = (o, \vec{i})$ qui est l'axe focal.

      i) Décrire Γ_{b^2}.

      ii) Déterminer et construire $\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$.

      iii) On suppose $r \neq b^2$. Montrer que, selon la valeur de r, Γ_r est l'image de Γ ou Γ' par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

PARTIE V Points cocycliques sur une conique

Γ désigne une conique qui n'est pas un cercle. On note $\mathcal{D}$ son axe focal. Soit quatre points distincts A_1, A_2, A_3 et A_4 sur Γ.

1. On suppose que $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont sécantes en un point S.

   a) Montrer que $S \notin \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

   b) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si

   $\overline{SA_1}\,.\,\overline{SA_2} = \overline{SA_3}\,.\,\overline{SA_4}$ (utiliser III ;1-a)

   c) Montrer que A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$.

2. On suppose $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ parallèles.

   a) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$.

   b) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont perpendiculaires à un même axe de symétrie de Γ.

3. On suppose que la tangente T_1 à Γ en A_1 et la droite $(A_2 A_3)$ sont sécantes en un point S. On appelle   le cercle circonscrit au triangle A_1, A_2 et A_3.

   a) Montrer que $S \notin \{A_1, A_2, A_3\}$.

   b) Montrer que T_1 est la tangente à   en A_1 si et seulement si :

   $SA_1^{\,2} = \overline{SA_2}\,.\,\overline{SA_3}$.

   c) Montrer que T_1 est la tangente à   en A_1 si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$.

CLASSES TERMINALES

B A R Ê M E

PRELIMINAIRES **(01,5 point)**
1) = 0,5 point
2 a) = 0,5 point b) = 0,5 point

PARITE I **(03 points)**
1) a) = 0,25 point b) = 0,5 point
2) a) = 0,5 point b) = 0,5 + 0,25 point
3) a) = 0,5 point b) = 0,5 point

PARTIE II **(04 points)**
1) = 0,25 point
2) = 0,5 point
3) a) = 0,25 point b) = 0,5 point
c) = 0,25 point
4) a) = 0,25 point b) = 0,5 point
c) =i) = 0,25 point ii) = 0,25 point
5) a) = 0,5 point b = 0,5 point

PARTIE III **(03,5 points)**
1) a) = 0,25 point b) = 0,25 point
2) a) = 01 point b) i) = 0,5 point
ii) = 0,5 point
c) = 0,5 point
d) = 0,5 point

PARTIE IV **(04,5 points)**
1) = 0,5 point
2) a) = 0,5 point
b) = 01 point
c) = 01 point
d) i) = 0,5 point
ii) = 0,5 point
iii) = 0,5 point

PARTIE V **(03,5 point)**
1) a) = 0,25 point b) = 0,5 point c) = 0,5 point
2) a) = 0,5 point b) = 0,5 point
3) a) = 0,25 point b) = 0,5 point c) = 0,5 point