SCIENCE EN HERBE **MATHS TERMINALE S1 & S3**

SERIE N°2-1: SUITES NUMERIQUES

Exercice 1:

1) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée

b) Que peut-on en déduire ?

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$

Démontrer que $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3) Démontrer par récurrence la relation : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de S_n.

Exercice 2 :

On considère les suites de terme généraux :

$u_n = ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$, $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$

1) Démontrer les inégalités suivantes : $v_n < u_n < w_n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$

2) Déterminer la limite de la suite de terme général : $S_n = (n^2 - n + 1)ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n$

Exercice 3 :

1) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$

a) Démontrer que $\forall \ p \in \mathbb{N}^*, \ p \geq 2 \ on \ a: \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) Démontrer que $\forall \ n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ est bornée.

2) Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$

a) Démontrer que $\forall \ p \in \mathbb{N}, \ p \geq 2$, on a : $\frac{1}{p^p} \leq \frac{1}{2^p}$.

b) En déduire la suite (u_n) est bornée.

Exercice 4 :

On considère les deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} v_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_n = v_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} u_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$

On pose $z_n = u_n + iv_n$

1) Démontrer que : $\forall \ n \geq 2, \ \exists \ a_n \in \mathbb{C} \ tel \ que: \ z_n = a_n z_{n-1}$

2) En déduire que : : $\forall \ n \geq 2$, on a : $|z_{n-1}| \leq |z_n| \leq b_n|z_{n-1}|$, avec $b_n = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$

3) Démontrer que : $\forall \ n \geq 2$, on a : $|z_n| \leq 3\left(1+\frac{1}{n}\right)$

4) En déduire la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b, \forall \ n \in \mathbb{N}$, $a \ et \ b$ étant des réels avec $a \neq 0$

1) Etudier la limite et le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ pour $a = 1$.

Dans la suite on suppose , $a \neq 1$

2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par $\forall \ n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique.

3) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n, a, b et u_0

4) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, en fonction de n, a, b et u_0

Exercice 6 :

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence :
$\forall \ n \in \mathbb{N},\ 6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n,\ u_0$ et u_1 étant donnés

1) Trouver deux suites géométriques non nulles (a_n) et (b_n) $n \in \mathbb{N}$ éléments de $\mathbb{E}$.
2) Montrer que la suite $(\alpha a_n + \beta b_n)$ $n \in \mathbb{N}$, appartient à $\mathbb{E}$, α et β étant des réels quelconques.
3) Soit $(u_n) \in \mathbb{E}$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$. déterminer u_n en fonction de n et étudier la convergence de (u_n)

Exercice 7 :

1) Déterminer le signe de $e^x - (x+1)$ et en déduire que pour tout nombre réel x, $1 + x \leq e^x$
2) Soit un nombre réel q tel que $0 < q < 1$ et (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n = (1+q)(1+q^2)\dots(1+q^n)$

a) Prouver que $u_n \leq e^{\frac{q}{1-q}}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$
b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. Conclure pour le comportement de la suite (u_n).

Exercice 8 :

1) Démontrer que $\forall \ n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$
2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout n, $4u_{n+1} = u_n + 24$. Démontrer que $\forall \ n \in \mathbb{N},\ u_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 8$
3) Démontrer par récurrence que, :$\forall \ n \geq 1,\ \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Exercice 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par : $u_n = \frac{3^n}{n!}$

1) Montrer que $\forall \ n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 3.
3) Démontrer que :$\forall \ n \geq 3$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} u_3$. En déduire le comportement à l'infini de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 10 :

1) Montrer en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto lnx$ que :
pour > 0: $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq \frac{1}{x}$. (1)
2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geq 1$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

a) Montrer en utilisant (1) que, $n \geq 1$: $u_n \geq \ln(n+1)$ et $ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq v_n \leq ln2$
b) En déduire le comportement à l'infini des suites (u_n) et (v_n)

Exercice 11 :

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ puis la convergence de la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$

1) Prouver que pour tout entier naturel n, u_n est positif
2) Prouver que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.
3) Démontrer que pour tout entier n, $u_{n+1} = e^{-S_n}$. En déduire la limite de S_n.

Exercice 12 :

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence :
$\forall \ n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0,\ u_0$ et u_1 étant donnés.

1) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q non nul :
Démontrer que (u_n) appartient à $\mathbb{E}$ si et seulement si $q = \frac{1}{2}$

2-a) Démontrer qu'une suite (u_n) appartient à $\mathbb{E}$ si et seulement si la suite de terme général $u_n 2^n$ est une suite arithmétique.

b). En déduire que $\mathbb{E}$ est l'ensemble des suite dont le terme général s'écrit $(an+b)2^{-n},\ a\ et\ b$ étant deux nombres réel arbitraires.

3-a) Démontrer que pour tout entier naturel $n,\ \ n \geq 2,\ on\ a\colon\ 2^n > C_n^2.$

b). En déduire que la suite de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge vers 0.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général $(an+b)2^{-n},\ ,\ a\ et\ b$ étant deux nombres réel arbitraires.

d) on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n = 4(u_1 - u_{n+2})$. En déduire la limite de S_n

<u>exercice 13 :</u>

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + sin\frac{(n-1)\pi}{n}$. On pose $Z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

1) Donner une expression simple de la somme : $1 + Z + Z^2 + \cdots + Z^{n-1}$
2) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme. En déduire l'égalité : $S_n = \frac{1}{tan\frac{\pi}{2n}}$.
3) Quelle est la limite de suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$