Avril 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

I

1. L'ensemble $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ est non-vide, car il contient les fonctions constantes et toute fonction lipschitzienne est continue sur I. Donc $\mathcal{L}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

   Soient f et g deux fonctions lipschitziennes, de constantes de Lipschitz respectives K_f et K_g, et λ un réel. Pour tout $x \in I$,

   $$\begin{aligned}|(f(x)+\lambda g(x))-(f(y)+\lambda g(y))| &\leqslant |f(x)-f(y)|+|\lambda||g(x)-g(y)|\\ &\leqslant (K_f+|\lambda|K_g)|x-y|,\end{aligned}$$

   ce qui implique que $f+\lambda g$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz $K_f+|\lambda|K_g$. Donc $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

   L'existence de K_f découle directement du théorème de la borne supérieure : toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

2. Soit $f, g \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ deux fonctions bornées et M_1 et M_2 des majorants respectifs de $|f|$ et de $|g|$. Pour tout $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)g(x)-f(x)g(y)|+|f(x)g(y)-f(y)g(y)|\\ &\leqslant M_1|g(x)-g(y)|+M_2|f(x)-f(y)|\\ &\leqslant (M_1K_g+M_2K_f)|x-y|,\end{aligned}$$

   donc fg appartient à $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$.

   Prenons $I=\mathbb{R}$, $f=g: x \mapsto x$, f et g sont trivialement des fonctions lipschitziennes, mais le produit $fg: x \mapsto x^2$, n'est pas une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car, pour $x=n \in \mathbb{N}^*$ et $y=0$, on a, $\left|\frac{n^2-0}{n-0}\right| = n$ non borné.

3. Supposons l'intervalle I compact. Soient f_1 et f_2 deux fonctions lipschitziennes, elles sont donc continues sur I.
   Puisque I est compact et f_1, f_2 continues, elles sont bornées sur I. Par la question précédente la fonction $f_1 f_2$ est lipschitzienne.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(0)| \leq K_f|x|$, ce qui implique

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad |f(x)| \leq |f(0)|+K_f|x|\,.$$

   D'où le résultat demandé avec, en particulier, $A=|f(0)|$ et $B=K_f$.

5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est lipschitzienne, pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant K_f\,,$$

comme x est arbitrairement pris dans I, on a $\sup_{x\in I}|f'(x)| \leq K_f$.
Inversement, soit $x, y \in I$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]\min(x,y), \max(x,y)[$ tel que

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = |f'(\xi)| \leq \sup_{x\in I}|f'(x)|\,,$$

ce qui montre que f est lipschitzienne et que $K_f \leqslant \sup_{x\in I}|f'(x)|$.
D'où l'équivalence souhaitée et $K_f = \sup_{x\in I}|f'(x)|$.

6. Soient M un majorant de la suite $(K_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x, y \in I$, on a $|f_n(y) - f_n(x)| \leq K_{f_n}|y - x| \leq M|y-x|$, en particulier, $|f_n(y) - f_n(x)| \leq M|y - x|$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient, $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. D'où f est lipschitzienne et $K_f \leq M$.

7. Soit $g \in \mathcal{L}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $K_g \leq 1$. On considère la fonction $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\widetilde{g}(x) = g(x-n) + n(g(1) - g(0))$ pour tout x dans $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$.

   (a) La fonction $\widetilde{g}$ est clairement continue comme composée est somme de fonctions continues. Montrons qu'elle est lipschitzienne : soit $x, y \in \mathbb{R}$ distincts et supposons sans perte de généralité que $x < y$. Si x et y sont dans un même intervalle $[n, n+1]$, il est clair que $|\widetilde{g}(y) - \widetilde{g}(x)| \leq |y - x|$. Sinon, il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $k \leq x \leq k+1 \leq \ell \leq y \leq \ell + 1$, on a

$$\begin{aligned}|\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(y)| &\leq |\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(k+1)| + |\widetilde{g}(k+1) - \widetilde{g}(\ell)| + |\widetilde{g}(\ell) - \widetilde{g}(y)|\\ &\leq (k+1-x) + |(\ell-k-1)(g(1)-g(0))| + (y-\ell)\\ &\leq (k+1-x) + (\ell-k-1) + (y-\ell) \;=\; y - x\,.\end{aligned}$$

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $g_n'(x) = n\big(\widetilde{g}(x+\frac{1}{n}) - \widetilde{g}(x)\big)$ et $\widetilde{g}$ est continue, donc g_n est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$|g_n'(x)| \leq n|\widetilde{g}(x+\frac{1}{n}) - \widetilde{g}(x)| \leq n(x + \frac{1}{n} - x) = 1\,.$$

   (c) Le changement de variable $u = n(t-x)$ donne $g_n(x) = \int_0^1 \widetilde{g}(x+\frac{u}{n})\,du$ et comme $\widetilde{g}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz plus petite ou égale à 1, on a

$$\begin{aligned}|g_n(x) - \widetilde{g}(x)| &\leqslant \int_0^1 |\widetilde{g}(x+\frac{u}{n}) - \widetilde{g}(x)|\,du\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{u}{n}\,du = \frac{1}{2n}\,.\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\{|g_n(x) - \widetilde{g}(x)|\} \leq \dfrac{1}{2n}$ et donc la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ vers $\widetilde{g}$.

II

1. Raisonnement par récurrence : la formule (2) est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie au rang n, l'application de la formule (1) en $x + na$ donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ &= \lambda^n \big[\lambda F(x+(n+1)a) + f(x+na)\big] + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ &= \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) + \sum_{k=0}^{n} \lambda^k f(x+ka)\,, \end{aligned}$$

ce qui est la formule au rang $n + 1$.

On procède également par récurrence : la formule (1) appliquée en $x - a$ donne

$$F(x) = \frac{1}{\lambda} F(x-a) - \frac{1}{\lambda} f(x-a)$$

qui est la formule (3) au rang 1. On obtient le passage du rang n au rang $n + 1$ en appliquant la formule précédente en $x - na$.

2. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

   (a) Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, d'après la question **I**. 4., il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \le A|x| + B$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$|\lambda^n f(x+na)| \leqslant |\lambda|^n (A|x+na| + B) \leqslant (A|x| + B)|\lambda|^n + A|an||\lambda|^n.$$

   Comme les séries de termes positifs $|\lambda|^n$ et $n|\lambda|^n$ sont convergentes ($|\lambda| < 1$), il en est de même pour la série de terme général $|\lambda^n f(x + na)|$.

   (b) Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$, on a

   $$F(x) - \lambda F(x+a) = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n \geqslant 0} \lambda^{n+1} f(x+(n+1)a) = f(x)\,,$$

   donc F vérifie (1).
   Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \big[f(x+na) - f(y+na)\big] \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K_f |x-y|\ .$$

   Donc $|F(x) - F(y)| \leqslant \dfrac{K_f}{1-|\lambda|}\ |x-y|$. Donc $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Reste à montrer que F est unique. Soit G une autre fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

(1). Par ce qui précède et **I.** 1., $G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par la formule (2), elle vérifie

$$(G-F)(x) = \lambda(G-F)(x+a) = \lambda^n(G-F)(x+na),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après **I.** 4., il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|(G-F)(x)| \leqslant |\lambda|^n \left(A|x+na| + B\right)\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle, donc $G-F$ est nulle. Donc F est l'unique fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(c) Les dérivées des fonctions f_1 et f_2 sont bornées, donc elles sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On a

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cos(x+na) \quad \text{et} \quad F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sin(x+na)\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^n \cos(x+na)$ et $\lambda^n \sin(x+na)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $\lambda^n e^{i(x+na)} = e^{ix}(\lambda e^{ia})^n$.
On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \exp\left(i(x+na)\right) = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1-\lambda \mathrm{e}^{ia}} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \lambda \mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a + \lambda^2}\ .$$

F_1 et F_2 sont les parties réelle et imaginaire de la somme qui vient d'être calculée :

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ , \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ . \tag{4}$$

3. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

(a) Même démonstration que dans **II.** 2. (a). Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que $|f(x)| \leq A|x| + B$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$|\lambda^{-n} f(x-na)| \leqslant |\lambda|^{-n}(A|x-na| + B) \leqslant (A|x|+B)|\lambda|^{-n} + A|an||\lambda|^{-n}.$$

Comme les séries de termes positifs $|\lambda|^{-n}$ et $|n||\lambda|^{-n}$ sont convergentes ($|\lambda|^{-1} < 1$), il en est de même pour la série de terme général $|\lambda^{-n} f(x-na)|$.

(b) On suit la même preuve que dans **II.** 2. (b).
Soit F définie par $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^n} f(x-na)$, on a

$$F(x) - \lambda F(x+a) = -\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{-n} f(x-na) + \sum_{n\geqslant 1} \lambda^{-n+1} f(x-(n-1)a) = f(x)\,,$$

donc F vérifie (1).
Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(x)-F(y)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n}\left[f(x-na) - f(y-na)\right]\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda|^{-n} K_f |x-y|\ .$$

Donc $|F(x)-F(y)| \leqslant K_f \dfrac{|\lambda|^{-1}}{1-|\lambda|^{-1}}\,|x-y| = \dfrac{K_f}{|\lambda|-1}$. Donc $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
De même, l'unicité se démontre exactement comme dans **II.** 2. (b). Soit G une autre fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1), alors $G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie,

$$(G-F)(x) = \lambda^{-1}(G-F)(x-a) = \lambda^{-n}(G-F)(x-na)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
D'après **I.** 4., il exste $A > 0$ et $B > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|(G-F)(x)| \leqslant |\lambda|^{-n}\left(A|x-na|+B\right)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle quand $n \uparrow +\infty$, donc $G-F$ est nulle. F est l'unique fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(c) Même calcul que dans **II** 2. (c). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe suivant

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} \exp\left(i(x-na)\right) = -\frac{\lambda^{-1}\mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-\lambda^{-1}\mathrm{e}^{-ia}} = -\frac{\lambda \mathrm{e}^{i(x-a)} - \mathrm{e}^{ix}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ .$$

F_1 et F_2 ont la même expression qu'en **II.** 2. (c) :

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\quad ,\quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ .$$

4. On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

(a) Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, $F(x)-F(x+a) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où $|f(x)| \leqslant K_F|a|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est donc bornée.

(b) Si $f = 0$, les fonctions constantes ou les fonctions lipschitziennes périodiques de période a conviennent, par exemple $F(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ ·

(c) Si $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie (1), pour toute fonction G lipschitzienne périodique de période a, la fonction $F+G$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie également (1). La fonction F n'est donc pas unique.

(d) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = f_2(x) = \sin x$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question **II.** 2. (c), formule (4), pour tout $-1 < \lambda < 1$,

$$F_2(x) - \lambda F_2(x+a) \;=\; \sin(x)\,,$$

où F_2 est donnée par la formule (4) (elle dépend naturellement de λ). En faisant tendre λ vers 1, on obtient l'expression

$$F(x) - F(x+a) \;=\; \sin(x)\,,$$

où $F(x) = \dfrac{\sin x - \sin(x-a)}{2(1-\cos a)}$ $(\cos a \neq 1)$. Cette fonction F est lipschitzienne comme combinaison linéaire de deux fonctions de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie (1) pour $\lambda = 1$. Elle répond donc à la question.

(ii) Supposons que $a = 2\pi$. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1) pour $\lambda = 1$. D'après la formule (2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F(x) = F(x+2n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+2k\pi) = F(x+2n\pi) + n\sin x\,,$$

en particulier, pour $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$F(\frac{3\pi}{2}+2n\pi) = F(\frac{3\pi}{2}) + n \quad \text{et} \quad F(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = F(\frac{\pi}{2}) - n\,,$$

ce qui donne, pour tout n, $F(\frac{3\pi}{2}+2n\pi) - F(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 2n + F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2})$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $\lambda = 1$.

5. On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

(a) On cherche une fonction F de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $F(x) = -F(x+a)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $F(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ est une fonction vérifiant cette identité.

(b) Pour toute constante C, la fonction CF vérifie (1), où F est la fonction de la question précédente. Il n'y a donc pas d'unicité.

(c) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \sin x$.

(i) On procéde comme dans la question **II.** 4. (b). (i). Pour tout $-1 < \lambda < 1$,

$$F_2(x) - \lambda F_2(x+a) \;=\; \sin(x)\,,$$

où F_2 est donnée par la formule (4). En faisant tendre λ vers -1, on obtient l'expression $F(x) = \dfrac{\sin x + \sin(x-a)}{2(1+\cos a)}$ ($\cos a \neq -1$). Cette fonction F est lipschitzienne et répond à la question.

(ii) Supposons que $a = \pi$. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1) pour $\lambda = -1$. D'après la formule (2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F(x) = (-1)^n F(x+n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin(x+k\pi) = (-1)^n F(x+n\pi) + n\sin x\,,$$

en particulier, pour $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ et un entier $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$F(\frac{3\pi}{2}+2n\pi) = F(\frac{3\pi}{2}) + 2n \quad \text{et} \quad F(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = F(\frac{\pi}{2}) - 2n\,,$$

ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(\frac{3\pi}{2}+2n\pi) - F(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 4n + F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2})$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $\lambda = -1$.

AVRIL 2012

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie sur $]-1,+\infty]$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de *f*.

La dérivée de *f* est égale à : $f^{'}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$. La fonction est donc strictement croissante, à valeurs dans R^{+} ;

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=\dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

On peut aisément vérifier que $u_n>0$, puis $u_{n+1}-u_n\geq 0$, et par récurrence que $u_n\leq 1$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, donc elle converge.

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Comme *f*. est continue, la limite *l* de la suite (u_n) doit vérifier : $l=f(l)=\sqrt{\dfrac{l+1}{2}}$, à savoir : $2l^2-l-1=0$ et comme cette limite est positive, on obtient : *l*=1.

Exercice n° 2

Soit la suite (S_n) définie, pour $n \in N^*$, par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$. Démontrer que ces suites sont adjacentes.

On a :

$v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ qui tend vers zéro,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante,

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \leq 0$, donc la suite (v_n) est décroissante.

Les deux suites sont donc adjacentes.

2. Démontrer que la suite (S_n) converge.

Comme la suite des termes de rang pair et celle des termes de rang impair sont adjacentes, elles convergent vers une même limite qui est celle de la suite (S_n).

3. Soit x un nombre réel positif, exprimer $\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}$ en fonction de $(-x)^{2n}$.

$\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x}$, car on a une suite géométrique de raison $-x$.

4. Soit la fonction numérique f définie sur R^+ par : $f(x) = Ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.

   Etudier les variations de f (on précisera le signe de f), Ln désigne le logarithme népérien).

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0$

La fonction f est donc croissante et comme $f(0)=0$, elle est positive. En particulier : $Ln(1+x) \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

5. Comparer $Ln(1+x)$ et $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

On procède comme à la question précédente (on remplace n par n+1), à partir de la fonction :
$g(x) = Ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ pour obtenir : $Ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

6. En déduire la limite de la suite (S_n).

Des deux questions précédentes, on obtient : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leq Ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, puis pour x=1, $u_n \leq Ln2 \leq v_n$. Par conséquent la suite (S_n) converge vers $Ln2$.

Exercice n° 3

Une entreprise souhaite acquérir une nouvelle boutique. Trois emplacements, notés 1, 2 et 3, sont disponibles. Il a été possible de contrôler le chiffre d'affaires de ces boutiques pendant une semaine (tableau1).

Tableau 1

Jours	**Chiffre d'Affaires journaliers des boutiques**		
	1	**2**	**3**
Lundi	60	65	80
Mardi	80	70	20
Mercredi	75	75	40
Jeudi	55	68	110
Vendredi	88	66	10
Samedi	60	63	80
Dimanche	50	60	60

1. Calculer la moyenne des chiffres d'affaires de la semaine pour chaque emplacement.

2. Différents indicateurs statistiques qui peuvent aider l'entreprise à prendre sa décision sont proposés (variance, coefficient de variation) :
Soit X le chiffre d'affaires d'une boutique et x_i le chiffre d'affaires du jour i (i=1,…,7)
Nous rappelons les définitions de ces différents indicateurs.

Indicateurs	**Expression**
Variance	$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$
Coefficient de variation	$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{\overline{X}}$

Calculer la valeur de ces indicateurs pour chaque boutique.

On obtient les résultats suivants :

Boutiques	$\overline{X}$	Var	$\sigma(X)$	CV
1	**66,86 +**	172,12	13,12	0,196
2	66,71	**20,50 +**	**4,53**	**0,068 +**
3	57,14	1106,19	33,26	0,582

3. En fonction de tous ces indicateurs, quel emplacement vous semble le meilleur et pourquoi ?

La boutique 1 a la meilleure moyenne, mais elle est plus risquée. La boutique 2 a une moyenne très proche de la 2, mais elle a l'avantage d'être nettement moins risquée. Il ne faut pas oublier que l'observation ne concerne qu'une semaine (cas d'un sondage).

On préfère donc la boutique 2.

Exercice n° 4

Soit E le sous espace vectoriel de R^3 déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y - z = 0\}$$

1. Déterminer une base de E. On notera X la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de E.

$$\forall (x, y, z) \in E, \quad (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1{,}0{,}1) + y(0{,}1{,}1) \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur E, dans la base canonique de R^3.

La matrice de projection orthogonale s'écrit : $M = X(X'X)^{-1}X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice *M* définie par :

$M = X(X'X)^{-1}X'$, où X' désigne la transposée de *X*.

Cette matrice correspond à la matrice précédente de projection orthogonale, donc 1 est valeur propre double (dimension de *E*) ayant comme vecteurs propres, les deux vecteurs de *X*. Et 0 est l'autre valeur propre dont le vecteur propre associé est orthogonal à X, par exemple :

(1, 1, -1)

4. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la symétrie par rapport à *E*.

Soit $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,1)$ une base de E et $e_3 = (1,1,-1)$ un vecteur orthogonal. La matrice de la symétrie s'écrit dans cette base : $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par changement de base, la matrice *S* de cette symétrie est égale à : $S = P\Delta P^{-1}$, où *P* est la matrice du changement de base à savoir :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient : $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit *D* la droite vectorielle de R^3 engendrée par le vecteur $u = (1,1,-1)$.

- Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la projection orthogonale sur *D*.

Comme la droite *D* est orthogonale à *E*, la matrice de la projection orthogonale sur *D* est égale à *I-M*, soit $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la symétrie par rapport à *D*.

La matrice de la symétrie par rapport à *D*, composée avec la matrice de la symétrie par rapport à *E* est égale à moins la matrice unité. Donc c'est l'opposé de l'inverse de S (question 4)

$S_D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (on peut aussi procéder comme à la question 4).

Exercice n° 5

Soit n un entier naturel non nul. Dans R, on considère l'équation $(E_n): x^n + x - 1 = 0$

Soit l'équation $(E_n): x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) , notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.
f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $\left[-1,+\infty\right[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in \left]0,1\right[$.
Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1 = 0$, ce qui est impossible. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est impossible, donc $l = 1$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :

$$\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$$

(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

f_n est strictement décroissante sur $\left]0,1\right[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Ln\,n}{2n}) \approx \frac{Ln\,n}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Ln\,n}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$

3. Montrer que $Ln(u_n)$ est équivalent à $-Ln\,n$ et en déduire que

$$x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$$

Pour n>2, $Ln(\frac{Ln\,n}{2n}) \le Ln(u_n) \le Ln(2\frac{Ln\,n}{n})$ implique $Ln(u_n) \approx -Ln\,n$, puis $nLn(1-u_n) = Ln\,u_n$ implique $-nu_n \approx -Ln\,n$, d'où $u_n \approx \frac{Ln\,n}{n}$ et enfin $x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$