DEVOIR N°1-1 DU 1er SEMESTRE :

DUREE : 2H

Exercice :

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}; \; w_n = u_n - 2\sqrt{n}.$$

1) .

a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

b) En déduire les inégalités : $u_n \leq 2\sqrt{n} - 2 \leq u_{n-1}$ et $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$.

2) Etudier les limites éventuelles des suites (u_n) et (v_n).

a) Montrer que (w_n) est bornée.

b) Etudier la monotonie de (w_n) et en déduire que (w_n) converge vers un réel compris entre -2 et -1.

Problème :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2 - 2x + 3} \; si\; x < 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{|x^2 - 1|}} \; si\; x \geq 0 \end{cases}$

Partie 1 :

1° déterminer le domaine de définition de f.

2° Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3° calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Etudier ses branches infinies.

4° Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer sa fonction f'.

5° Achever l'étude de f et établir son tableau de variation.

6° Construire la cour représentative (C_f) de f.

Partie 2 :

Soit g la restriction de f à $I = [1; +\infty[$.

1° Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

2° Calculer $g^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, étudier la dérivabilité de g^{-1} en $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $et\; caluler\; g^{-1}{}'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3° Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ et calculer $g^{-1}{}'(x)$.

4° Tracer $\left(C_{g^{-1}}\right)$.

5° Utiliser $\left(C_g\right)$ pour construire (C_h) où h est la fonction définie par : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{x-2}}$.