SERIE N°1 : BARYCENTRE-LIGNE DE NIVEAU

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle.
1) Déterminer deux réels α et β tels que le point G, défini par $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$, soit barycentre de $(A;\alpha)et(B;\beta)$.
2) Soit H défini par : $3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$.
Déterminer les deux réels m et p tels que H soit le barycentre de (A ; m) et (C ; p), avec m + p = 1.

Exercice 2 :

Dans un triangle ABC, le point O est le milieu du segment [BC], a est un réel tel que $a^2 \neq 1$.
Soit P le barycentre de (A,1) et (B,a) et Q le barycentre de (A, 1) et (C, -a).
Démontrer que O, P et Q son alignés.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment [BC]. A tout réel m, on associe le point G_m lorsqu'il existe, barycentre (A,2), (B, m+1) et (C, m+1).
a) Pour quelles valeurs de m le point G_m existe-t-il ?
b) Montrer que G_m est un point de la droite (AI). Peut-il être en I ? A quelle condition appartient-il au segment ouvert]AI[?

Exercice 4 :

Barycentre et droites remarquables d'un triangle
On sait que, puisque l'isobarycentre G d'un triangle appartient à chaque médiane, ces trois droites sont concourantes en G.
Le but de cet exercice est de démontrer par ce type de raisonnement que les bissectrices intérieur (respectivement les hauteurs) d'un triangle sont concourantes.
Soit ABC un triangle, H_A le pied de la hauteur issue de A et A_1 le pied de la bissectrice intérieure de l'angle BAC. On note : c = AB, b = AC et a = BC.

Partie I

1° *Le pied de la bissectrice intérieure*
a) Donner deux expressions de l'aire du triangle AA_1B.
b) Donner deux expressions de l'aire du triangle AA_1C.
c) Déduire des questions précédentes que $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}$.
d) Prouver que A_1 est barycentre de (B,b) et (C,c).
2°) *Le pied de la hauteur*
On suppose que les angles du triangle son aigus ' donc H_A est un point de [BC]).
a) Prouver que $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{H_AC}{H_BB}$.
b) Prouver que H_A est le barycentre de (B, tanB) et (C, tan C)

Partie II

1° *Les bissectrices intérieures sont concourantes*
Soit I le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).

Montrer que I appartient à (AA_1).
b) Prouver que les bissectrices sont concourantes. On appelle I le centre du cercle inscrit dans ABC.
2° *Les hauteurs sont concourantes*
En utilisant un raisonnement analogue montrer que les hauteurs sont concourantes.

Exercice 5 ;

Soit A et B deux points du plan. On pose AB = 1 (unité graphique 6 cm).
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$a)\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\ b)\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$

$c)\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=3\ et\ AM=2$

Exercice 6 :

On donne deux points A et B distincts et on note a = AB.
Soit l'application du plan dans IR telle que : $M \mapsto MA^2 - MB^2$

1° Construire les lignes de niveau de l'application f associées aux valeurs : $-2a^2, -a^2, 0, \frac{a^2}{2}, 3a^2$

2° Déterminer le réel k pour que la ligne de niveau k passe par le barycentre des points A et B affectés des coefficients 7 et -3.

Exercice 7 :

On donne dans le plan , deux points A et B tels que AB = 4.
Soit l'application du plan dans IR définie par : $f(M)=MA^2+MB^2$.
1° Déterminer les lignes de niveau de l'application f associées aux réels 5, 8 et 12.
2° Discuter suivant les valeurs de k, la nature de la ligne de niveau k.
3° Déterminer l'ensemble des points du plan tels que : $12 \le MA^2+MB^2 \le 24$.

Exercice 8 :

Soit A et b tels que AB = 3.
1° Construire les barycentres I de (A,1) et (B,2), et J de (A,1) et (B,-2).
2° a) Montrer que MA = 2 MB équivaut à : $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$

b) En déduire que l'ensemble des points du plan vérifiant MA = 2 MB est le cercle de diamètre [IJ]. Le construire.
3° Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=16$. Le construire.
4° a) Déduire des questions précédente la construction d'un triangle ABC tel que :
AB = 2 CB et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=16$.
b) Calculer alors les longueurs CB et CA.

Exercice 9 :

Soit ABC un triangle rectangle en A, de centre de gravité G, et A' le milieu du segment [BC].
On pose AB = a.
1° Exprimer $4\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.

2°Exprimer GA^2+GB^2 en fonction de a. En déduire que $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{2}{3}a^2$.

3° Prouver que pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$

4° Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle isocèle tel que :
AB = AC = 5 et BC = 6.
1° Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7$.
2° Soit G le barycentre de (A,2), (B,3) et (C,3). Construire G et montrer que AG = 3.
3° Soit f l'application qui, à tout point M du plan, associe :

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}.$$

Montrer que f(M) = f(G) + 4 MG^2.
4° Calculer f(A) et f(G).
5° Déterminer l'ensemble des points M tels que f(M) = f(A), et représenter cet ensemble.