

SÉRIE N°4-1: CALCUL INTEGRAL ET EQUATION DIFFERENTIELLE

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + \cos^4 x) dx ; \int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2} dx ; \int_0^3 (1 - |x-1|^3) dx ;$$

$$\int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt ; \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt ; \int_2^x \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) dt, \quad x > 1 ; \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin^2 x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sin^3 x dx ; \int_0^1 \ln^2 x dx ;$$

$$\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{x} \right) dx ; \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x - \frac{1}{\tan x} \right) dx$$

Exercice 2 :

- Déterminer les réels a, b et c tels que : $\frac{u^2-1}{2u-1} = ax + b + \frac{c}{2u-1}, \quad u \neq \frac{1}{2}$
- Calculer : $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx$
- Calculer : $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx$
- Justifier que : $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \right), \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$
- En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

Exercice 3 :

- On pose $u_n = \int_1^e (\ln x)^n dx, n \in \mathbb{N}$ Calculer u_0 et u_1 puis établir une relation entre u_{n+1} et u_n
- On pose : $v_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x} \cos x dx$.
 - Calculer v_n et montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - Calculer $S_n = \sum_{i=0}^n v_i$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 4 : On considère l'intégral $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

- Calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n .
- Calculer I_3 et I_5
- Soit f l'application qui à tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right]$ associe $f(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$
 - Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3} \right]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$
 - En déduire I_2 et I_4

Exercice 5 :

On pose $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

- Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n)
- Soit g_n le polynôme défini par : $g_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}, g_n(x) = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$
 - Soit f la fonction définie par $f_n(x) = \frac{1}{1+x} - g_n(x)$. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$ en fonction de u_n
- Montrer que $\forall x \in [0; 1], -\frac{x^n}{2} \leq f_n(x) \leq x^n$. En déduire que : $-\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n+1}$. Puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 6 :

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\int_0^a t e^t dt = a e^a - \int_0^a e^t dt$.

- 2) Soit $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^a e^t \frac{(a-t)^n}{n!} dt$.
- a) Démontrer que : $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$
- b) Démontrer par récurrence que, $\forall n \geq 1$, $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + I_n$
- c) Démontrer que : $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!} (e^a - 1)$
- 3) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{a^n}{n!}$
- a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$
- b) En déduire que $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
- c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$

Exercice 7 :

Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

- 1) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que la fonction F est impaire et étudier ses variations.
- 3) On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$
 - a) Etudier les variations de f .
 - b) Soit $x > 0$, montrer que : $\forall t \in [x; 2x]$, $0 \leq f(t) \leq f(x)$
 - c) En déduire que $\forall x > 0$, $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
 - d) Donner l'allure de la courbe de F .

Exercice 8 :

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

- 1) Etudier la fonction $f: x \mapsto e^{-x^2}$ et tracer sa courbe représentative
- 2) Montrer que F est une fonction impaire.
- 3) Etudier le sens de variation de F .
- 4) Montrer que $\forall t \in [1; +\infty[$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$
- 5) En déduire que $\forall t \in [1; +\infty[$ on a : $\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{e}$
- 6) Montrer que $\forall t \in [1; +\infty[$ on a : $F(x) < F(1) + \frac{1}{2}$
- 7) En déduire F a une limite finie l en $+\infty$.
- 8) Calculer à l'aide de la méthode des rectangles, une valeur approchée de $F(1)$ à 0,1 près.
- 9) Donner alors un encadrement de l et l'allure de la courbe de F .

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \sin \pi x$

- 1- a) Tracer la courbe représentative (C) de f . unité 8m.
- b). Calculer $I = \int_0^1 \sin \pi x dx$. Interpréter géométriquement cette intégrale.
- 2) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$
 - a) interpréter géométriquement S_n . Faire la figure pour $n = 8$.
 - b) Prouver que : $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{n-1}{n}\pi} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$
 - c) En déduire que : $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \left(\frac{n-1}{n}\pi\right) = \tan \frac{\pi}{2n}$
 - d) Prouver que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$
- 3). Comparer les résultats des questions 1) et 2) et interpréter graphiquement.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$

- 1) Soit $J = \int_1^2 f(x) dx$

- a) Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$, à l'aide d'une intégration par partie.
- b) En déduire J
- 2) on pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
- a) Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
- b) Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que
- $$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$
- c) En déduire que : $U_n - \frac{1}{n} f(2) \leq J \leq U_n - \frac{1}{n} f(1)$. Puis $J + \frac{1}{n} f(1) \leq U_n \leq U_n + \frac{1}{n} f(2)$, et
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

Exercice 11 :

Soit (E) la courbe d'équation : $y = \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2}$

- Montrer que (E) est l'image du demi-cercle (C): $x^2 + y^2 = 16, y \geq 0$, par l'affinité orthogonale d'axe (xx') et de rapport $\mp \frac{1}{2}$.
- Calculer l'aire de la partie E du plan délimité par (E) et l'axe (xx')
- Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de (xx')
- Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de (yy')

Problème 1 :

Partie A : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \neq 0, \varphi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et $\varphi(0) = 0$

- Montrer que φ et φ' sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 2\varphi(x) = x^3 \varphi'(x)$ (1)
- Etudier φ et construire sa. On précisera les points d'inflexions éventuelles

Partie B : Soit f la fonction définie par : $\forall x \neq 0, f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \int_0^x \varphi(t) dt$ et $f(0) = 0$

- a) Montrer que f est impaire
b) Montrer que : $\forall x > 0 \text{ on a } \int_0^x \varphi(t) dt \leq x \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
c) En déduire que f est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$
- Montrer que $\forall x \neq 0, f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} f(x)$
- a) En utilisant (1) montrer que : $\forall x > 0 \int_0^x \varphi(t) dt = \frac{x^3}{2} \varphi(x) - \frac{3}{2} \int_0^x t^2 \varphi(t) dt$
b) Montrer que $\forall x > 0 \int_0^x t^2 \varphi(t) dt \leq x^3 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Que peut-on en déduire ? f est-elle dérivable en 0 ?
d) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)$
- En utilisant (1), montrer que :
a) $\forall x > 0 \int_0^x t^2 \varphi(t) dt = \frac{x^5}{2} \varphi(x) - \frac{5}{2} \int_0^x t^4 \varphi(t) dt,$ (2)
b) $\forall x > 0 \int_0^x t^4 \varphi(t) dt \leq x^5 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ (3)
c) En utilisant (2) et (3), établir que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x^3}\right) = \frac{1}{2}$
d) En déduire que f est continue en 0.

Problème 2 :

Partie A :

- Montrer que pour tout réel t positif on a : $\ln t \leq t - 1$.
- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$
- a) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

- b) Etudier les variations de f .
- c) Montrer que f est prolongeable par continuité en zéro par une fonction g .
- d) Etudier la dérivabilité de g en 0. Et tracer la courbe de g .
- e) Soit x un réel fixé de l'intervalle $[1; +\infty[$. Calculer en justifiant son existence, la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\ln x}{x}\right)^k$.

Partie B : on se propose d'étudier la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{t}{t-\ln t} dt$

- 1- Justifier l'existence et la dérivabilité de F sur $]0; +\infty[$.
- 2- Etudier le sens de variation de F .
- 3- Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x . quelle signification géométrique peut-on donner du réel $F(x)$?
- 4- Etude de la limite de F en 0.
 - a) Démontrer que pour tout $x \in]0; 1]$, on a : $\frac{x}{x-\ln x} \leq x$
 - b) En déduire que pour tout $x \in]0; 1]$, on a : $\frac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$
 - c) En déduire F admet en 0 une limite α comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0.
- 5- Etude de la limite de F en $+\infty$
 - a) Montrer que, pour tout x de $[1; +\infty[$. On a : $f(x) \geq 1$.
 - b) En déduire la limite de F en $+\infty$
- 6- On se propose d'encadrer la fonction F par deux fonctions sur $[1; +\infty[$.
 - a) Calculer $\int_1^x (1 + \ln t) dt$, pour $x \in]0; +\infty[$
 - b) Montrer que si : $t \geq 1$, alors : $\frac{t}{t-\ln t} \leq 1 + \ln t$
 - c) En déduire que, pour tout x de $[1; +\infty[$. On a : $F(x) \leq x \leq \ln x$
 - d) Calculer $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$, pour $x \in]0; +\infty[$
 - e) Montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$, on a : $x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 1 \leq F(x)$
 - f) Encadrer le réel $F(x)$ pour x supérieur à 1.

Exercice 12 :

- 1- On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$
 - a) Résoudre l'équation différentielle (E)
 - b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe de la fonction $f(x) = e^{3x}$
- 2- Déterminer la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $9g''(x) - 18g'(x) + 10g(x) = 0$ et dont la courbe passe par les points $A(0; \sqrt{3})$ et $B(\pi; 0)$
- 3- Soit $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, résoudre l'équation différentielle : $(1 + \cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$

Exercice 13 :

- 1- Résoudre les équations différentielles :
 - a) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$; b) $y' + y = xe^{-x}$; c) $y' - y = \sin x$; e) $y' - y = e^x \ln x$
- 2- Résoudre l'équation différentielle : $4y'' - 12y' + 9y = (9x + 3)e^{3x}$
- 3- Soit l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$ (1)
 - a) Vérifier que la fonction f telle que : $f(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (1)
 - b) En déduire la solution générale de (1)

Exercice 14 :

- 1- Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$
- 2- Déterminer la solution qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$
- 3- On pose : $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$
 - a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F(x)$

- b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$
- 4- Soit l'équation $2y' + y = 5e^{2x}$. En faisant le changement de fonction $y = z + e^{2x}$, déterminer les solutions de cette équation.

Exercice 15 :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$$

- 1- Trouver l'équation différentielle du second ordre (E) satisfaite par y .
- 2- Intégrer l'équation (E) en déduire la solution générale du système. Préciser la solution qui vérifie : $y(0) = 1$ et $z(0) = -1$

Exercice 16 :

- 1- Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (1)
- 2- Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et f la fonction définie par : $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$. Exprimer $f''(x)$ en fonction de $g\left(\frac{1}{x}\right)$ et x .
- 3- On considère l'équation différentielle : $y'' = -\frac{1}{x^4}y$ (2). Démontrer que g est solution de (2) si et seulement si f est solution (1).
- 4- En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 17 :

- 1- Déterminer la solution de l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 1 = 0$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe.
- 2- Pour tout entier naturel on pose : $f_n(x) = xe^{-2^nx}$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$
 - b) On désigne par C_n la courbe de f_n . Par quelle transformation passe-t-on de C_n à C_{n+1}
- 3- Plus généralement on pose $A_n = \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} f_n(x) dx$.
 - a) Calculer $A_0 = \int_0^1 f_0(x) dx$.
 - b) Comparer A_n et A_{n+1}
 - c) Quelle est la nature de la suite (A_n) ?