Durée : 06 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2007 **CLASSES DE TERMINALE**

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME N°1 (09,75 points)

Soit (E) un plan affine euclidien et d la distance euclidienne définie sur (E). Soit $\mathcal{A}$ une partie de (E).

Définitions :

- ✓ On appelle distance sur € une application de : (E) x(E) $\rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :
- ✓ $\forall$ (x, y, z)$\in$ (E) x (E) x (E)
  d(x, y) = d(y, x) ;
  d(x, y) = 0 si et seulement si x = y ;
  d(x, z) $\leq$ d(x, y) + d(y, z).
- ✓ On appelle expansion de ($\mathcal{A}$, d) toute application f de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ telle que : quels que soient M et M' éléments de $\mathcal{A}$, on ait la relation d (M, M') $\leq$ d (f(M), f(M')).
- ✓ On appellera isométrie de ($\mathcal{A}$, d) toute application bijective de f conservant la distance, c'est-à-dire : d(M, M') = d (f(M), f(M')). On notera $\mathcal{E}$($\mathcal{A}$, d) l'ensemble des expansions et $\mathcal{I}$($\mathcal{A}$, d) l'ensemble des isométries.

1/ a) Prouver qu'une expansion est injective. **(0,5 point)**

b) Montrer que la composée de deux expansions est une expansion **(0,5 point)**

c) Soit f une expansion bijective. Prouver que f est une isométrie si et seulement si $f^{-1} \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{A}$, d). **(0,5 point)**

2/ Soient A et B deux points distincts de (E) et $\mathcal{A}$ le segment [AB].

a) Pour f $\in \mathcal{E}$ ($\mathcal{A}$, d), déterminer la paire {f(A), f(B)}. **(0,5 point)**

b) En composant au besoin f avec une isométrie de ($\mathcal{A}$, d), montrer que l'on peut se ramener au cas où f(A) = A et f(B) = B. Déterminer alors f. **(0,5 points)**

c) Déterminer $\mathcal{E}$ ($\mathcal{A}$, d). **(0,75 point)**

3/ $\mathcal{A}$ est une partie quelconque de (E) et f $\in \mathcal{E}$ ($\mathcal{A}$, d). On suppose que U et V sont deux points de $\mathcal{A}$ invariants par f et que C est un point de $\mathcal{A}$ tel que f(C) $\neq$ C. Prouver que le segment [U V] est inclus dans le demi plan fermé contenant C de frontière la médiatrice de [C, f(C)]. **(0,75 point)**

CLASSES DE TERMINALE

4/ On suppose que $\mathcal{A}$ est la partie fermée composée de l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F', de grand axe 2a, et de l'ensemble des points de $\mathcal{E}$. Soit A et A' les extrémités du grand axe, puis B et B' les extrémités du petit axe.

a) Prouver que $d(M, M') \leq 2a$, pour tout $(M, M') \in \mathcal{A}^2$. Déterminer les conditions d'égalité. **(0,5 + 0,25 point)**

b) Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que $f(A) = A$ et $f(A') = A'$ et qu'il existe C de $\mathcal{E}$ tel que $f(C) \neq C$. Montrer que F et F' sont sur la médiatrice de $[C, f(C)]$. **(0,5 point)**

c) Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que A, A', B et B' sont invariants par f. Montrer que

$f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. **(0,75 point)**

d) Déterminer l'expansion de $(\mathcal{A}, d)$ **(01 point)**

5/ Déterminer $\mathcal{I}(\mathcal{A}, d)$ lorsque $\mathcal{A}$ est le domaine fermé limité par un cercle (C) non réduit à un point. **(01 point)**

6/ On suppose que (E) est rattaché à $\mathbb{R}^2$. Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de (E). On note δ la distance sur (E) définie par : $\delta(M,M') = \sup(|x - x'|; |y - y'|)$.

On note $\Gamma = \{M \in (E)$ tels que $\delta(O, M) \leq 1\}$ la boule fermée de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1. On note $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$ et $D(1, -1)$ les quatre sommets de Γ.

a) Prouver qu'un élément $g \in \mathcal{I}(\Gamma,\delta)$ envoie une paire de points situés sur 2 segments distincts parallèles du quadrilatère A, B, C, D sur une paire de points possédant la même propriété. **(01 point)**
En déduire que g laisse globalement invariant {A, B, C, D}. **(0,25 point)**

b) Montrer que si un élément g de $\mathcal{I}(\Gamma,\delta)$ vérifie $g(A) = A$ alors $g(C) = C$. **(0,5 point)**

PROBLEME N°2 (10,25 points)

L'objet du problème est de trouver les termes premiers d'une suite récurrente.

Partie 1 (02,75 points)

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles U définies par : $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, pour tout $n > 0$.

1/ a) Prouver que si U et V sont des 2 suites de $\mathcal{U}$, alors la suite $(\alpha U_n + \beta V_n) \in \mathcal{U}$ pour tous réels α et β. **(0,25 point)**

b) Montrer que tout élément de $\mathcal{U}$ est défini par la donnée des réels U_0 et U_1. **(0,5 point)**

2/ On suppose que les suites V et W sont des suites de $\mathcal{U}$ non proportionnelles. Soit (Un) une suite de $\mathcal{U}$. Prouver qu'il existe un couple unique (α, β) de réels tels que :
$\alpha V_0 + \beta W_0 = U_0$ et $\alpha V_1 + \beta W_1 = U_1$
En déduire que l'ensemble $\mathcal{U}$ est l'ensemble des suites $(\alpha V_n + \beta W_n)$ **(0,5 point)**

3/ a) Déterminer r de façon qu'il soit la raison d'une suite géométrique de premier terme 1 appartenant à $\mathcal{U}$. **(0,5 point)**
b) Montrer que les deux suites géométriques obtenues en a) ne sont pas proportionnelles. **(0,5 point)**
c) En déduire l'expression générale d'une suite quelconque de $\mathcal{U}$ **(0,5 point)**

Partie 2 **(02,5 points)**

Soit U la suite définie par $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n + 1$, avec $U_1 = 1$ et $U_2 = 2$.

1/ Montrer que U est une suite positive et croissante. **(0,5 point)**

2/ On définit la suite V par $V_n = U_n + 1$ pour tout $n > 0$.
Donner l'expression précise de V_n en fonction de n. **(0,5 point)**

3/ Démontrer que :
$(R_1) : (V_{2n})^2 = V_{2n-1} V_{2n+1} - 1$
$(R_2) : (V_{2n+1})^2 = V_{2n} V_{2n+2} + 1$ **(0,5 point)**

4/ Déduire de la question 3/ la relation (R_3) $(U_{2n+1}-U_{2n-1})^2 = U_{2n-1} U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1}$. **(0,5 point)**

5/ Montrer que :
$(R_4) : (U_{2n+1} + U_{2n-1})^2 = 5 U_{2n-1} U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1}$
$(R_5) : 5 U_{2n-1} U_{2n+1} = (U_{2n-1} + U_{2n+1}) (U_{2n-1} + U_{2n+1} – 1)$ **(0,5 point)**

Partie 3 **(02,5 points)**

6/ A partir de (R_5) démontrer que si U_{2n-1} est premier, alors il divise soit U_{2n+1}, soit $U_{2n+1} – 1$.
(0,5 point)

7/ On considère le premier cas : U_{2n-1} divise U_{2n+1}.
a) Montrer qu'il existe un entier $q > 1$ tel que :
$(q^2 – 3q + 1) U_{2n-1} = 1 + q : (R_6)$ **(0,25 point)**
b) Quelles sont les seules valeurs possibles de q ? **(0,5 point)**
Le terme U_{2n-1} est-il premier ?

8/ Dans cette question, on considère le deuxième cas :
U_{2n-1} divise $U_{2n+1} – 1$.

a) Montrer qu'il existe un entier $q' > 1$ tel que :
$(q'^2 – 3q' + 1) U_{2n-1} = 4 – q' : (R_7)$ **(0,5 point**
b) Montrer que q' admet une seule valeur possible. Alors le terme U_{2n-1} est-il premier ?
(0,5 point)

9/ Un terme de rang impair de la suite U peut-il être un nombre premier ? **(0,25 point)**

Partie 4 **(02,5 points)**

10/ En utilisant (R_2), démontrer que :
$(R_8) : [(U_{2n+2} + 1) + (U_{2n} + 1)]^2 = 5(U_{2n} + 1) (U_{2n+2} + 1) + 1$ **(0,25 point)**
En déduire la relation
$(R_9) : 5 U_{2n} U_{2n+2} = (U_{2n} + U_{2n+2} – 2) (U_{2n} + U_{2n+2} + 1)$ **(0,25 point)**

11/ Démontrer alors que si U_{2n} est premier il divise $U_{2n+2} – 2$ ou $U_{2n+2} + 1$. **(0,5 point)**

12/ On considère le premier cas : U_{2n} divise $U_{2n+2} – 2$
a) Montrer qu'il existe $q > 1$ tel que : **(0,25 point)**
$(R_{10}) : (q^2 – 3q + 1) U_{2n} = 7-3q$

b) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R_{10}) ? **(0,5 point)**

13/ On considère le deuxième cas : U_{2n} divise $U_{2n+2} + 1$

a) Montrer qu'il existe un entier $q' > 1$ tel que : **(0,25 point)**
$(R_{11}) : (q'^2 – 3q' + 1) U_{2n} = 3q' – 2$.
b) Déterminer les seules valeurs possibles de q'. **(0,25 point)**
c) Déterminer alors les seuls termes nombres premiers de la suite U. **(0,25 point)**